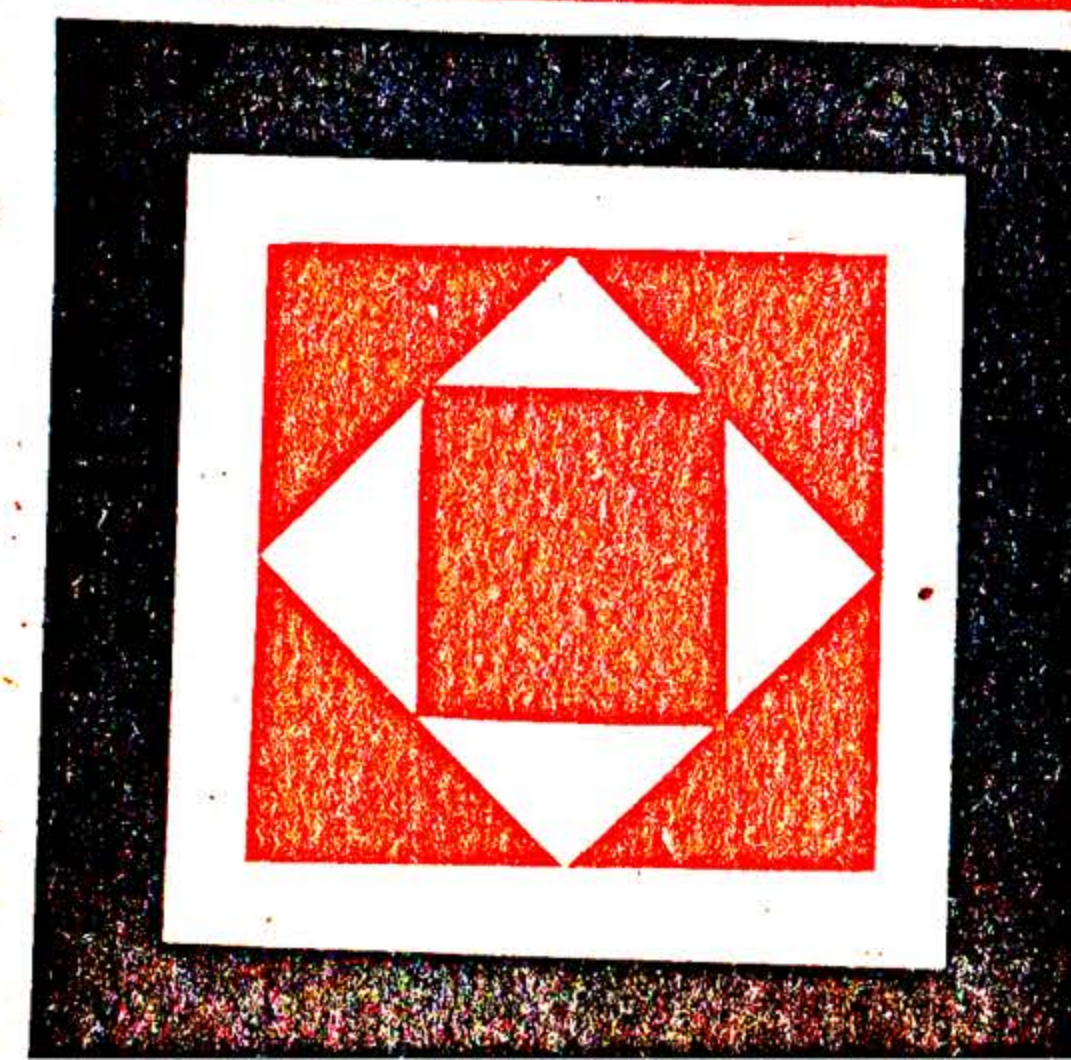


CULEGERI
DE
PROBLEME
DE
MATEMATICĂ
SI
FIZICĂ
SERIE

Ion Gh. Viță

PROBLEME DE FIZICĂ CU SITUAȚII IMPUSE
pentru bacalaureat și admitere
în învățământul superior



CUVÎNT INTRODUCTIV

Lucrarea de față se adresează elevilor din cursurile liceale și profesorilor lor, precum și altor cititori care doresc să-și completeze cunoștințele de fizică.

Spre deosebire de alte culegeri de probleme, structura cărții este axată pe problemele cu situații speciale (condiții impuse unor mărimi și fenomene, discuții asupra posibilităților existenței unor relații sau valori și probleme de extrem).

Prin conținut și realizare, cartea poate servi la pregătirea pentru concursuri și examene, precum și activităților de la cercurile de fizică ale elevilor.

Recomand celor ce vor utiliza acest material ca, mai întâi, să încerce singuri soluționarea problemelor și după aceea să recurgă la rezultatele din carte. Autorul ar fi bucuros dacă cititorii ar găsi și alte metode de rezolvare, eventual mai simple sau mai directe.

Aduc mulțumirile cele mai sincere conf. dr. Anatolie Hristev, referentul lucrării, care a analizat în întregime și amănunțit materialul de față și a făcut sugestii cu privire la conținutul problemelor și la modul de redactare.

Autorul

I. MIȘCAREA RECTILINIE UNIFORMĂ

1.1. De pe un vas, aflat la distanța d_1 km de țărm, trebuie trimis un mesaj la punctul de comandă aflat la distanța d_2 ($d_2 > d_1$) km (fig. 1.1). Curierul trimis folosește o barcă (viteza v_1), iar pe uscat poate alerga cu viteza v_2 ($v_2 > v_1$). Mesajul trebuie să ajungă la destinație în cel mai scurt timp. Să se determine traiectoria optimă aleasă de curier.

Soluție. Fie ADC traiectoria urmată de curier ($BD = x$).

Timpul necesar călătoriei pe apă este

$$t_1 = \frac{AD}{v_1} \quad (1)$$

sau

$$t_1 = \frac{\sqrt{d_1^2 + x^2}}{v_1} \quad (2)$$

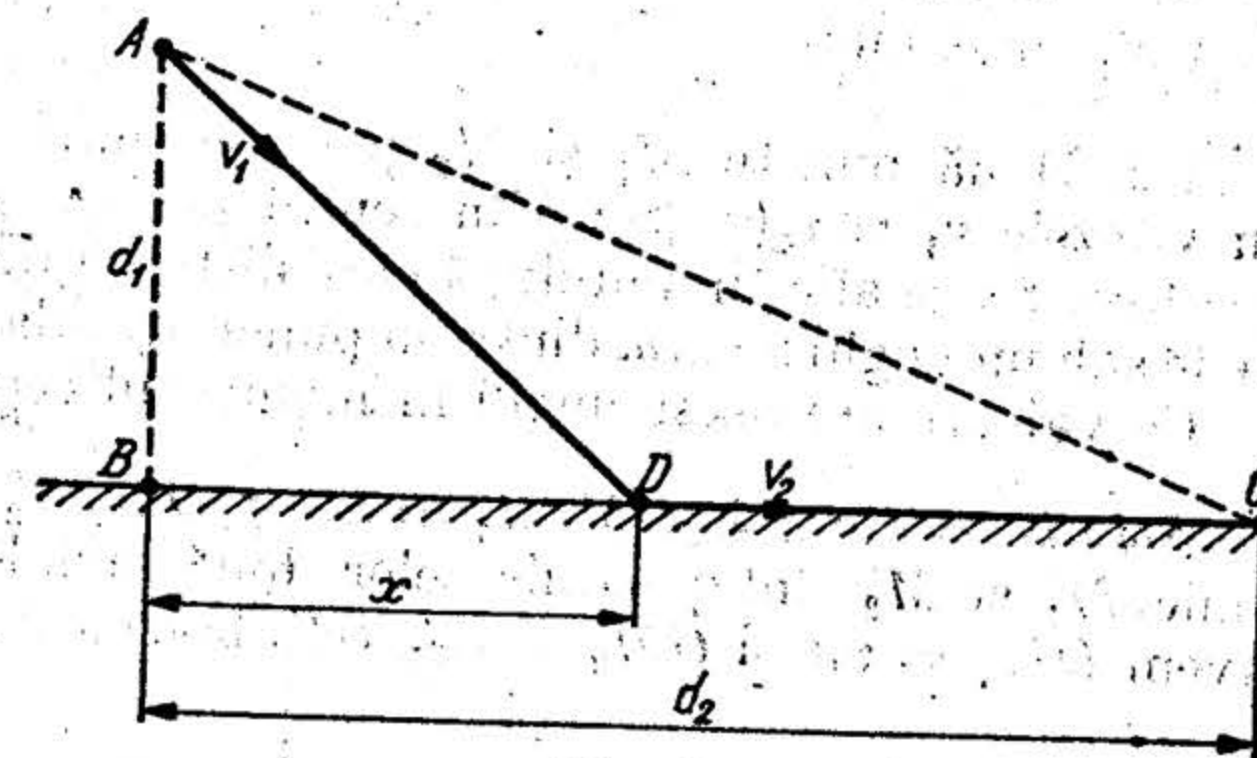


Fig. 1.1

Timpul necesar deplasării pe uscat este

$$t_2 = \frac{DC}{v_2} \quad (3)$$

sau

$$t_2 = \frac{d_2 - x}{v_2} \quad (4)$$

Timpul total necesar este

$$t = \frac{\sqrt{d_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{d_2 - x}{v_2} \quad (5)$$

* Notățiile utilizate în această lucrare sînt cele uzuale, din manualele de fizică pentru liceu.

Derivata timpului în raport cu x este

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{d_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \quad (6)$$

Din anularea acestei derivate se obține

$$\frac{x^2}{v_1^2(d_1^2 + x^2)} = \frac{1}{v_2^2} \quad (7)$$

de unde rezultă distanța cerută

$$x = \frac{v_1 d_1 \sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_2^2 - v_1^2} \quad (8)$$

Se poate arăta că pentru traiectoriile ABC sau direct AC este necesar un timp mai mare.

1.2. Două puncte M_1 și M_2 pornesc simultan în mișcare uniformă cu vitezele v_1 și v_2 ($v_1 > v_2$) în sensul pozitiv al axei Ox , din originea acestuia. Să se afle timpul după care distanța dintre cele două puncte se vede sub un unghi maxim dintr-un punct M_3 aflat pe axa Oy la distanța d .

Ce valoare are acest unghi în momentul cerut (fig. 1.2)?

Soluție. Notăm: $\angle OM_3M_1' = \alpha$; $\angle OM_3M_2' = \beta$; $\angle M_1'M_2'M_3 = \varphi$, unde M_1' și M_2' sînt pozițiile celor două mobile în momentul t cerut. Avem $OM_1' = v_1 t$ și $OM_2' = v_2 t$. Se observă că

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1 t}{d}, \operatorname{tg} \beta = \frac{v_2 t}{d} \quad (1)$$

Deoarece $\varphi = \alpha - \beta$, avem

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{dt(v_1 - v_2)}{d^2 + v_1 v_2 t^2} \quad (2)$$

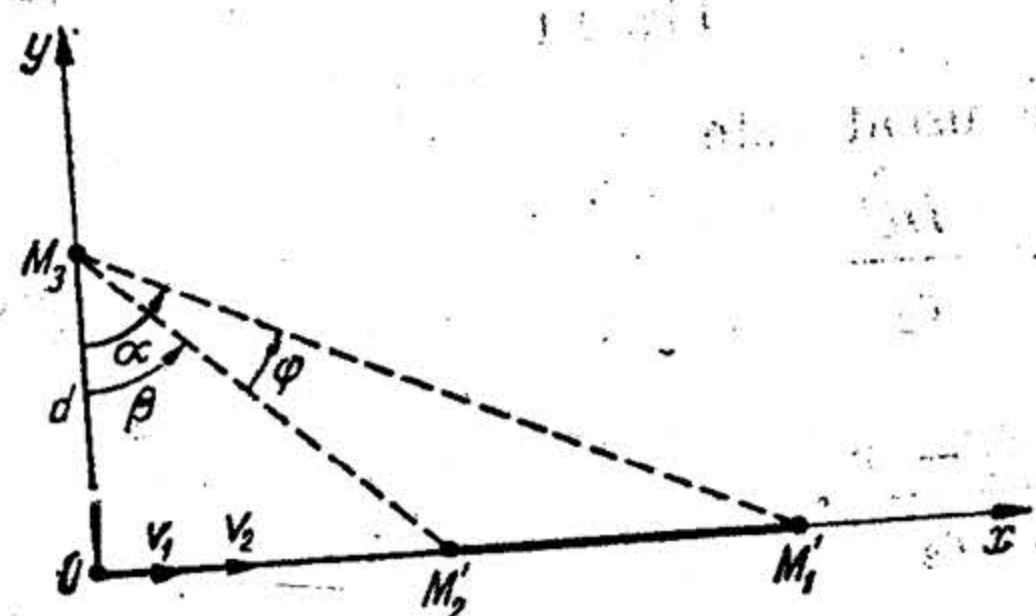


Fig. 1.2

Se derivează funcția trigonometrică în raport cu timpul și se obține

$$\frac{d(\operatorname{tg} \varphi)}{dt} = \frac{d^3 v_1 + d v_1^2 v_2 t^2 - d^3 v_2 - d v_1^2 v_2 t^2 - 2 v_1^2 v_2 dt^2 + 2 v_1 v_2^2 dt^2}{(d^2 + v_1 v_2 t^2)^2} \quad (3)$$

Prin anularea derivatei se obține

$$t_{\max} = \frac{d \sqrt{v_1 v_2}}{v_1 v_2} \quad (4)$$

Unghiul cerut de problemă are valoarea

$$\varphi_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{d(v_1 - v_2) t_{\max}}{d^2 + v_1 v_2 t_{\max}^2} \quad (5)$$

sau

$$\varphi_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{(v_1 - v_2) \sqrt{v_1 v_2}}{2 v_1 v_2} \quad (6)$$

1.3. Din originea sistemului de axe xOy pleacă simultan, în mișcare uniformă, cu vitezele v_1 și v_2 , două mobile, după cele două axe. După timpul t_0 mobilele își schimbă atât sensul de mișcare cât și vitezele. Să se afle timpul după care distanța dintre mobile este minimă precum și valoarea acestei distanțe (fig. 1.3.)

Soluție. După timpul t_0 mobilele se vor afla în punctele A și B la depărtările $OA = v_1 t_0$ și $OB = v_2 t_0$ de originea axelor.

După timpul t de la schimbarea sensului și vitezelor, mobilele se vor afla în punctele A' și B' astfel încît

$$OA' = v_1 t_0 - v_2 t \quad (1)$$

și

$$OB' = v_2 t_0 - v_1 t \quad (2)$$

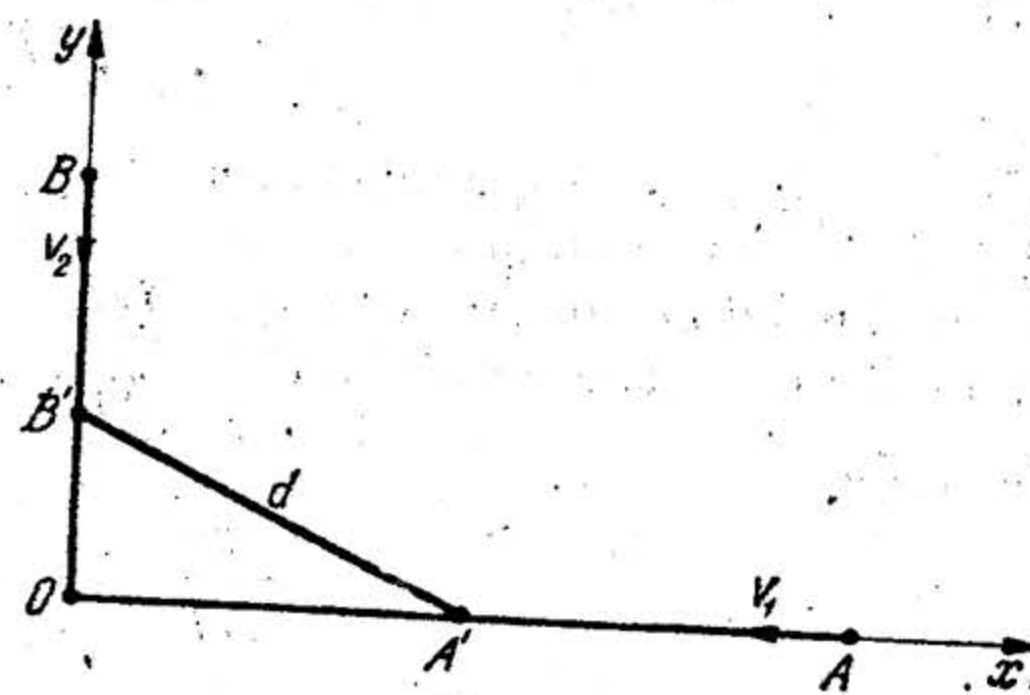


Fig. 1.3

Distanța dintre mobile va fi

$$d = A'B' = \sqrt{(v_1 t_0 - v_2 t)^2 + (v_2 t_0 - v_1 t)^2} \quad (3)$$

Se derivează această distanță în raport cu timpul și se obține

$$\frac{dd}{dt} = \frac{-v_2(v_1 t_0 - v_2 t) - v_1(v_2 t_0 - v_1 t)}{d} \quad (4)$$

Din anularea derivatei avem timpul cerut

$$t_{\min} = \frac{v_1 v_2 t_0}{v_1^2 - v_2^2} \quad (5)$$

Înlocuind (5) în (3) găsim distanța cerută

$$d_{\min} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \cdot t_0. \quad (6)$$

1.4. Pe o șosea rectilinie $x'x$ se deplasează un autobuz cu viteză constantă v_2 . Un pasager, aflat la distanța h de șosea, observă apropierea autobuzului și începe să alerge în întâmpinarea lui cu viteza constantă v_1 ($v_1/v_2 = k$). Cunoscând distanța inițială dintre om și autobuz a ($a > h$) să se discute posibilitatea de întâlnire a omului cu autobuzul (fig. 1.4).

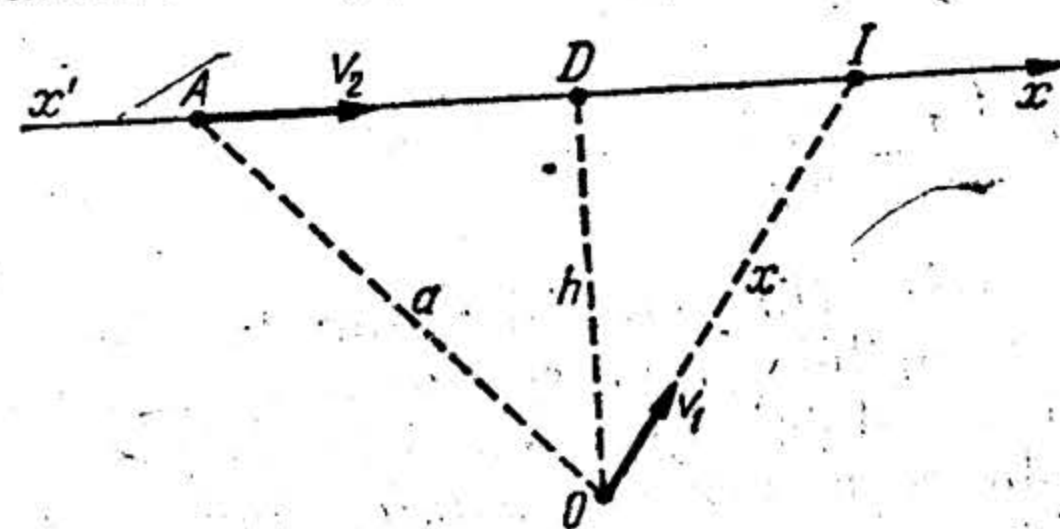


Fig. 1.4

Soluție. Fie I punctul de întâlnire. Timpul de mișcare este același pentru ambele mobile, adică

$$t = \frac{AI}{v_2} \quad (1)$$

și

$$t = \frac{OI}{v_1} = \frac{x}{v_1} \quad (2)$$

de unde,

$$\frac{x}{AI} = \frac{v_1}{v_2} = k \quad (3)$$

sau

$$x = k \cdot AI \quad (4)$$

deci

$$AI = \frac{x}{k} \quad (5)$$

Din $\triangle ODI$ avem

$$x^2 = OD^2 + DI^2 = OD^2 + (AI - AD)^2 = h^2 + \left(\frac{x}{k} - \sqrt{a^2 - h^2}\right)^2 \quad (6)$$

sau

$$(1 - k^2)x^2 - 2k\sqrt{a^2 - h^2}x + k^2a^2 = 0. \quad (7)$$

Soluția ecuației este

$$x_{1,2} = \frac{k}{1 - k^2} (\sqrt{a^2 - h^2} \pm \sqrt{k^2a^2 - h^2}). \quad (8)$$

Discuție. a) Dacă $k = 1$ avem

$$x = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - h^2}} \quad (9)$$

(ecuația (7) este liniară).

b) Dacă $k \neq 1$ și $a < h/k$ întâlnirea nu e posibilă.

c) Dacă $k \neq 1$ și $a = h/k$ întâlnirea e posibilă la distanța

$$x_1 = x_2 = \frac{k}{1 - k^2} \sqrt{a^2 - h^2}. \quad (10)$$

d) Dacă $k > 1$ și $a > h/k$ întâlnirea e posibilă la distanța

$$x = \frac{k}{1 - k^2} (\sqrt{a^2 - h^2} - \sqrt{k^2a^2 - h^2}). \quad (11)$$

1.5. Un vislaș parcurge în sensul curentului apei distanța d și se întoarce înapoi, fără oprire. Timpul total de deplasare este t . Viteza proprie a omului este v_1 , iar a apei v_2 . Ce condiție trebuie să îndeplinească viteza proprie a vislașului pentru ca timpul de deplasare total să fie fixat într-un anumit interval de timp ($t_1 < t < t_2$)?

Soluție. Timpul total de deplasare este

$$t = \frac{d}{v_1 + v_2} + \frac{d}{v_1 - v_2}. \quad (1)$$

De aici

$$tv_1^2 - 2dv_1 - v_2^2t = 0 \quad (2)$$

de unde

$$v_1 = \frac{d}{t} + \sqrt{\frac{d^2}{t^2} + v_2^2}. \quad (3)$$

Viteza proprie a vislașului, considerată ca funcție de timp, este descrescătoare pe intervalul $[t_1, t_2]$, conform condițiilor problemei, adică

$$v_1(t_1) > v_1(t_2). \quad (4)$$

Deci, condiția cerută se scrie

$$\frac{d + \sqrt{d^2 + t_2^2 v_2^2}}{t_2} < v_1 < \frac{d + \sqrt{d^2 + t_1^2 v_1^2}}{t_1} \quad (5)$$

1.6. Se dau două direcții perpendiculare, care se intersectează în punctul O . De pe aceste direcții, din punctele A și B ($OA = d_1$ și $OB = d_2$), pleacă în același moment către O două mobile cu vitezele constante v_1 și v_2 . Să se afle timpul după care distanța dintre mobile va fi minimă (fig. 1.6).

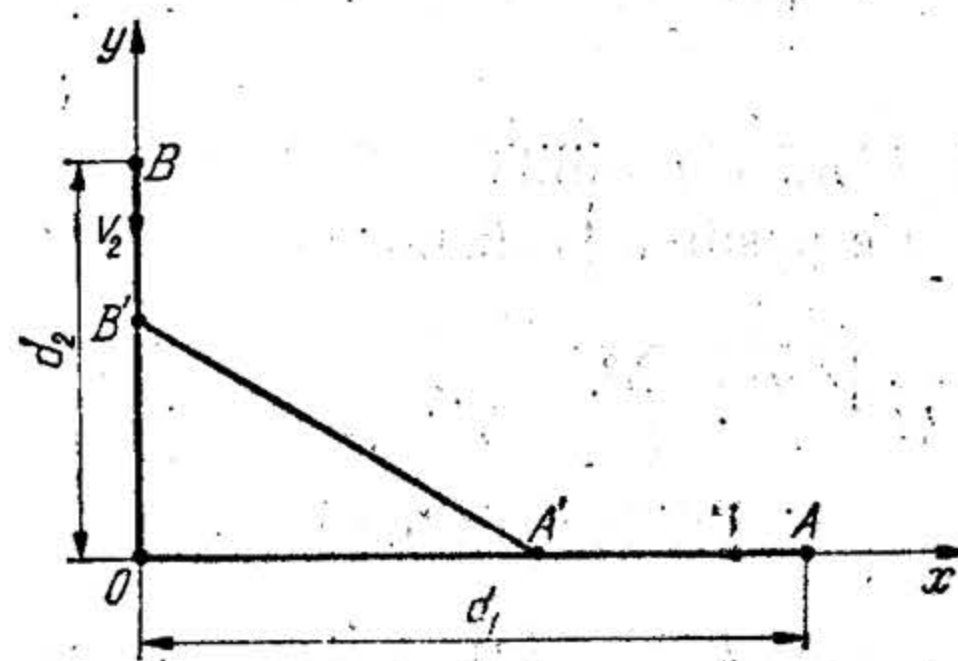


Fig. 1.6.

Soluție. După timpul t mobilele au parcurs distanțele

$$AA' = v_1 t \text{ și } BB' = v_2 t. \quad (1)$$

Deci

$$OA' = d_1 - v_1 t \text{ și } OB' = d_2 - v_2 t, \quad (2)$$

deci

$$d = A'B' = \sqrt{(d_1 - v_1 t)^2 + (d_2 - v_2 t)^2}. \quad (3)$$

Derivata acestei distanțe în raport cu timpul este

$$\frac{dd}{dt} = \frac{t(v_1^2 + v_2^2) - v_1 d_1 - v_2 d_2}{d}. \quad (4)$$

Prin anularea acestei derivate obținem timpul cerut

$$[t]_{d=\min} = \frac{v_1 d_1 + v_2 d_2}{v_1^2 + v_2^2}. \quad (5)$$

1.7. Din punctele $A(x_{01}, y_{01})$ și $B(x_{02}, y_{02})$ pleacă simultan în mișcare uniform-rectilinie două mobile cu vitezele v_1 și v_2 după direcții care fac cu axa Ox unghiurile α_1 și α_2 . Să se afle timpul după care distanța dintre mobile este minimă (fig. 1.7).

Soluție. Fie t timpul cerut. La acest moment, coordonatele punctelor A' și B' vor fi

$$\begin{aligned} x' &= x_{01} + v_1 t \cos \alpha_1 \\ x'' &= x_{02} + v_2 t \cos \alpha_2 \\ y' &= y_{01} + v_1 t \sin \alpha_1 \\ y'' &= y_{02} + v_2 t \sin \alpha_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Distanța dintre mobile în acest moment va fi

$$d = A'B' = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} \quad (2)$$

sau

$$d = \sqrt{[x_{02} + v_2 t \cos \alpha_2 - (x_{01} + v_1 t \cos \alpha_1)]^2 + [y_{02} + v_2 t \sin \alpha_2 - (y_{01} + v_1 t \sin \alpha_1)]^2}. \quad (3)$$

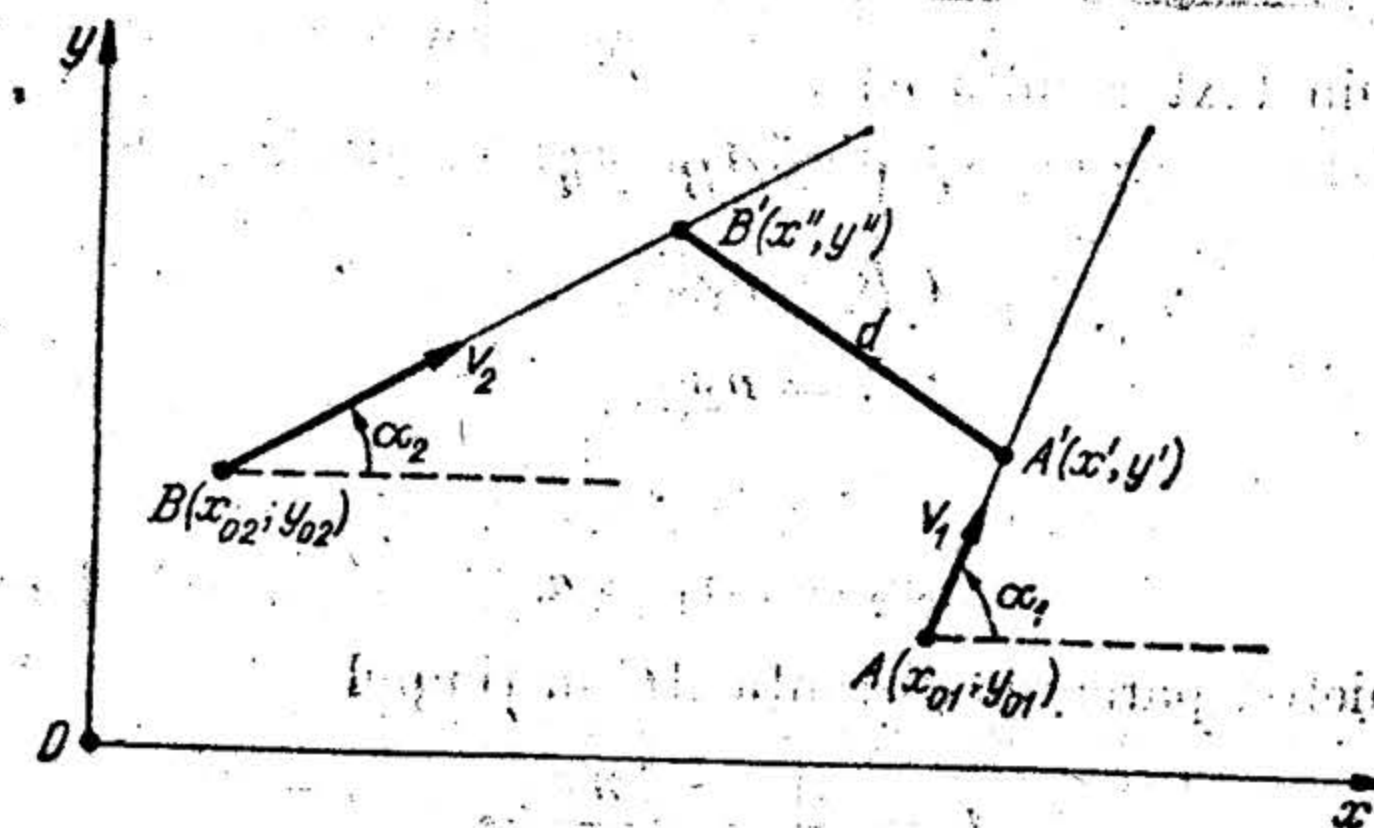


Fig. 1.7

În urma calculelor, avem

$$d = \sqrt{At^2 + Bt + C} \quad (4)$$

unde

$$\begin{aligned} A &= v_2^2 - v_1^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - 2v_1 v_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ B &= 2(x_{02} v_2 \cos \alpha_2 + y_{02} v_2 \sin \alpha_2 - x_{01} v_1 \cos \alpha_1 - y_{01} v_1 \sin \alpha_1 - \\ &\quad - x_{02} v_1 \cos \alpha_1 - y_{02} v_1 \sin \alpha_1 - x_{01} v_2 \cos \alpha_2 - y_{01} v_2 \sin \alpha_2) \\ C &= x_{02}^2 + y_{02}^2 - x_{01}^2 - y_{01}^2 - 2x_{01} x_{02} - 2y_{01} y_{02}. \end{aligned} \quad (5)$$

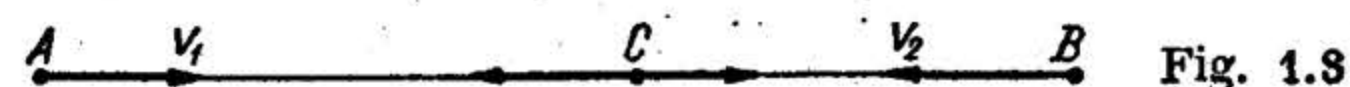
Se derivează această distanță în raport cu timpul și din anularea ei avem

$$2At + B = 0 \quad (6)$$

de unde

$$[t]_{d=\min} = -\frac{B}{2A}. \quad (7)$$

1.8. Din punctele A și B ale unei drepte pornesc într-o mișcare uniform rectilinie, unul spre altul și în același moment, doi pietoni. Ei se întâlnesc în punctul C unde constată că primul a parcurs cu a metri mai mult ca al doilea. După întâlnire, își continuă deplasarea, primul ajungând în B după n_1 secunde iar al doilea în A după n_2 secunde. Să se afle vitezele pietonilor și condiția de posibilitate a problemei (fig. 1.8).



Soluție. Din text rezultă că

$$\begin{aligned} CA - CB &= a \\ CB &= n_1 v_1 \\ CA &= n_2 v_2 \end{aligned} \quad (1)$$

de unde

$$n_2 v_2 - n_1 v_1 = a. \quad (2)$$

Primul pieton parcurge distanța AC în timpul

$$t_1 = \frac{AC}{v_1} = \frac{n_2 v_2}{v_1}. \quad (3)$$

Al doilea pieton parcurge distanța BC în timpul

$$t_2 = \frac{n_1 v_1}{v_2}. \quad (4)$$

Deoarece $t_1 = t_2$, avem

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1}}. \quad (5)$$

Rezultă

$$v_1 = \frac{a \sqrt{n_2}}{n_2 \sqrt{n_1} - n_1 \sqrt{n_2}} \quad (6)$$

și

$$v_2 = \frac{a \sqrt{n_1}}{n_2 \sqrt{n_1} - n_1 \sqrt{n_2}}. \quad (7)$$

Este necesar ca

$$n_2 \sqrt{n_1} - n_1 \sqrt{n_2} > 0 \quad (8)$$

ceea ce conduce la

$$n_2 > n_1, \quad (9)$$

care este condiția cerută de problemă.

1.9. O barcă merge pe un riu, contra curentului, parcurgând distanța l metri. Viteza apei este v_2 m/s. Apoi intră într-un lac, străbătând distanța totală s metri. Să se afle viteza proprie a bărcii știind că timpul total de mișcare este inferior unei valori t .

Soluție. Fie v_1 viteza proprie a bărcii. Rezultă inecuația

$$\frac{l}{v_1 - v_2} + \frac{s - l}{v_1} < t \quad (1)$$

sau

$$t v_1^2 - (s + v_2 t) v_1 + v_2 (s - l) > 0. \quad (2)$$

Rezolvînd inecuația, avem

$$v_1 > \frac{s + v_2 t + \sqrt{(s - v_2 t)^2 + 4 v_2 l t}}{2t}. \quad (3)$$

1.10. Două direcții concură sub unghiul α în punctul O . În același moment pleacă într-o mișcare uniform rectilinie două mobile: primul din punctul A situat astfel ca $OA = k$, cu viteza v_1 , spre O , iar al doilea din punctul O , cu viteza v_2 . Să se afle timpul după care distanța dintre mobile este minimă (fig. 1.10).

Soluție. După un timp t , avem

$$OB = k - v_1 t \text{ și } OC = v_2 t. \quad (1)$$

La fel



Fig. 1.10

$$d = \sqrt{(k - v_1 t)^2 + v_2^2 t^2 - 2 v_2 t (k - v_1 t) \cos \alpha}. \quad (2)$$

Derivînd această distanță și anulînd-o, rezultă

$$t(v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos \alpha) = k(v_1 + v_2 \cos \alpha) \quad (3)$$

de unde

$$[t]_{d=d_{\min}} = \frac{k(v_1 + v_2 \cos \alpha)}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha} \quad (4)$$

1.11. Distanța dintre două localități A și B este d metri. Din A și B pleacă într-o mișcare uniform rectilinie două mobile cu vitezele v_1 și v_2 . Să se afle locul și momentul întâlnirii mobilelor (discutându-se și posibilitatea de întâlnire) în situațiile:

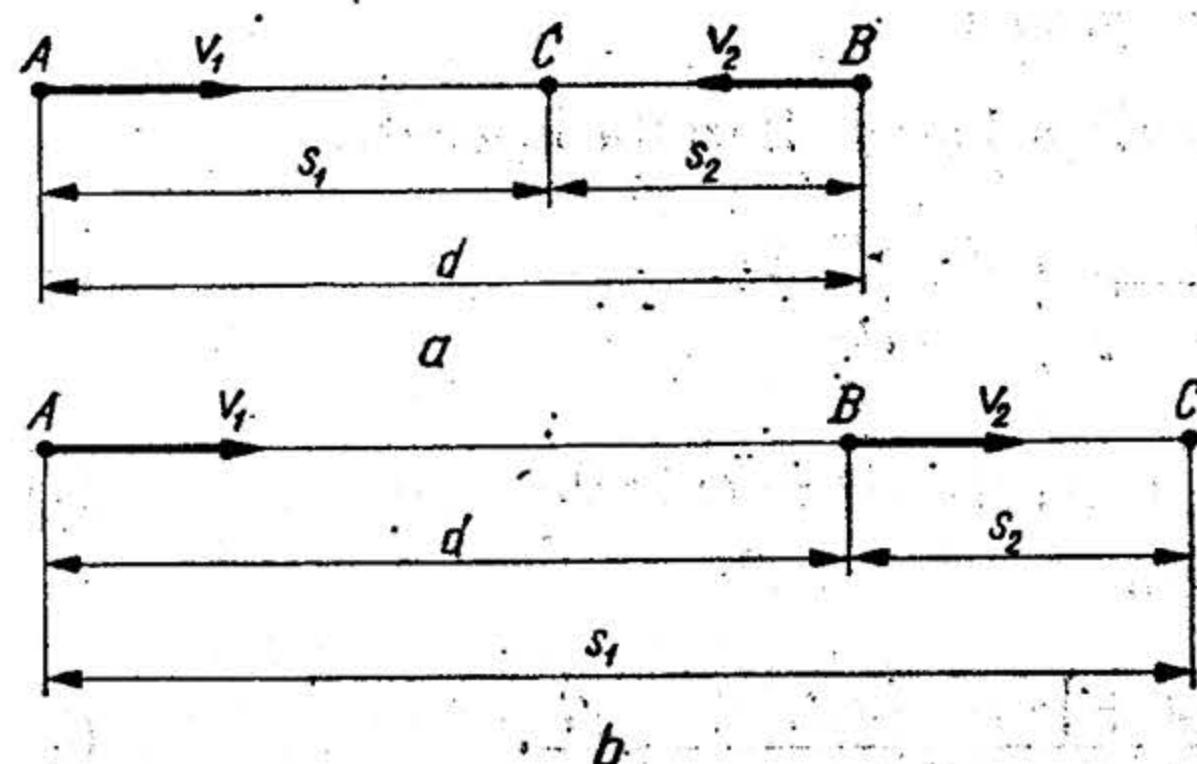


Fig. 1.11

a) mobilele pleacă în același moment, unul spre altul;

b) idem, unul după altul (de la A spre B);

c) mobilele pleacă unul spre altul, al doilea având o întârziere t_0 ;

d) mobilele pleacă în același sens (de la A la B), al doilea având o întârziere t_0' (fig. 1.11).

Soluție. a) Se observă că

$$s_1 + s_2 = d \quad (1)$$

și

$$\begin{aligned} s_1 &= v_1 t \\ s_2 &= v_2 t \end{aligned} \quad (2)$$

de unde

$$\begin{aligned} t &= \frac{d}{v_1 + v_2} \\ s_1 &= \frac{v_1 d}{v_1 + v_2} \\ s_2 &= \frac{v_2 d}{v_1 + v_2} \end{aligned} \quad (3)$$

Întâlnirea este totdeauna posibilă.

b) Se observă că

$$s_1 - s_2 = d \quad (4)$$

și

Avem

$$\begin{aligned} s_1 &= v_1 t \\ s_2 &= v_2 t \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{d}{v_1 - v_2} \\ s_1 &= \frac{v_1 d}{v_1 - v_2} \\ s_2 &= \frac{v_2 d}{v_1 - v_2} \end{aligned} \quad (6)$$

Întâlnirea este posibilă numai dacă $v_1 > v_2$.

c) Avem

$$v_1 t_1 + v_2 t_2 = d \quad (7)$$

de unde

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 &= t_0 \\ t_1 &= \frac{d + v_2 t_0}{v_1 + v_2} \\ t_2 &= \frac{d - v_1 t_0}{v_1 + v_2} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} s_1 &= v_1 \cdot \frac{d + v_2 t_0}{v_1 + v_2} \\ s_2 &= v_2 \cdot \frac{d - v_1 t_0}{v_1 + v_2} \end{aligned}$$

Întâlnirea este posibilă dacă $t_0 < d/v_1$.

d) Avem

$$\begin{aligned} v_1 t_1 - v_2 t_2 &= d \\ t_1 - t_2 &= t_0' \end{aligned} \quad (9)$$

de unde

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{d - v_2 t_0'}{v_1 - v_2} \\ t_2 &= \frac{d - v_1 t_0'}{v_1 - v_2} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}s_1 &= v_1 \cdot \frac{d - v_2 t_0}{v_1 - v_2} \\ s_2 &= v_2 \cdot \frac{d - v_1 t_0}{v_1 - v_2}\end{aligned}\quad (11)$$

Întilnirea este posibilă numai dacă $v_1 > v_2$ și $t_0 < d/v_1$ (sau $v_1 < v_2$, dar $t_0 > d/v_1$).

1.12. Două mobile descriu, pe axele Ox și Oy , mișcările uniforme: $x = k_1 + k_2 t$ și $y = k_3 + k_4 t$. În ce moment distanța dintre ele va fi minimă? Ce condiție îndeplinesc cei 4 coeficienți la întilnirea mobilelor?

Soluție. La un moment dat, distanța dintre mobile este

$$d = \sqrt{(k_1 + k_2 t)^2 + (k_3 + k_4 t)^2} \quad (1)$$

Derivata distanței în raport cu timpul se anulează pentru

$$t = -\frac{k_1 k_2 + k_3 k_4}{k_2^2 + k_4^2} \quad (2)$$

de unde

$$d_{\min} = \frac{k_1 k_4 - k_2 k_3}{\sqrt{k_2^2 + k_4^2}} \quad (3)$$

La întilnire, distanța se anulează, de unde

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{k_3}{k_4} \quad (4)$$

care este condiția cerută.

1.13. Dintr-un punct $A(0, -4/3)$ pornește într-o mișcare rectilinie uniformă, cu viteza $v_1 = 3$ m/s, un mobil, pe o dreaptă Δ_1 de coeficient unghiular $k_1 = -2/3$.

În același moment, din poziția $P(2, 1) \in \Delta_1$ pleacă alte două mobile în mișcare uniform-rectilinie, pe direcțiile $\Delta_2 \parallel \Delta_1$ și $\Delta_3 \perp \Delta_1$, cu vitezele $v_2 = 2$ m/s și v_3 . Se cere:

- să se scrie ecuațiile traiectoriilor celor 3 mișcări;
- să se determine v_3 astfel ca să fie posibilă întilnirea mobilelor 1 și 3 în $M \equiv \Delta_1 \cap \Delta_3$;
- să se afle distanța dintre cele 3 mobile în momentul determinat la b), coordonatele fiind date în metri.

Soluție. a) Traectoria primei mișcări este dreapta

$$y + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}x \quad (1)$$

sau

$$\Delta_1 \equiv 2x + 3y + 4 = 0. \quad (2)$$

Coeficientul unghiular al dreptei Δ_2 va fi $k_2 = k_1 = -2/3$, deci ecuația celei de a doua mișcări va fi dreapta

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2) \quad (3)$$

sau

$$\Delta_2 \equiv 2x + 3y - 7 = 0. \quad (4)$$

Coeficientul unghiular al dreptei Δ_3 va fi

$$k_3 = -\frac{1}{k_1} = \frac{3}{2}. \quad (5)$$

Deci, cea de a treia traiectorie va fi dreapta

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2) \quad (6)$$

sau

$$\Delta_3 \equiv 3x - 2y - 4 = 0. \quad (7)$$

b) Coordonatele punctului de intersecție $\Delta_1 \cap \Delta_3$ sînt soluțiile sistemului

$$3x - 2y = 4 \quad (8)$$

$$2x + 3y = -4.$$

Rezultă: $x_M = \frac{12}{39}$; $y_M = -\frac{20}{13}$, deci

$$AM = s_1 = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = 0,37 \text{ m} \quad (9)$$

$$PM = s_3 = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = 3 \text{ m}.$$

Primul mobil se mișcă timp de

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = 0,12 \text{ secunde.} \quad (10)$$

De aici ($t_1 = t_3$) avem

$$v_3 = \frac{s_3}{t_3} = 25 \text{ m/s.} \quad (11)$$

c) În acest timp ($t_1 = t_2 = t_3$), al doilea mobil a parcurs distanța

$$s_2 = v_2 t_2 = 0,24 \text{ m.} \quad (12)$$

Distanța cerută este

$$d = \sqrt{s_2^2 + s_3^2} = 3,08 \text{ m.} \quad (13)$$

1.14. Un riu are lățimea d și curge cu viteza v . Un vislaș poate dezvolta viteza u . Se cere:

a) orientarea vitezei u astfel ca vislașul, plecând din punctul A , să ajungă pe malul opus în punctul B (v. fig. 1.14) pe drumul cel mai scurt;

b) idem, în timpul *minim*, să ajungă pe malul opus, într-un punct oarecare;

c) valoarea *minimă* a vitezei u astfel ca vislașul să ajungă în punctul C ($BC = k$).

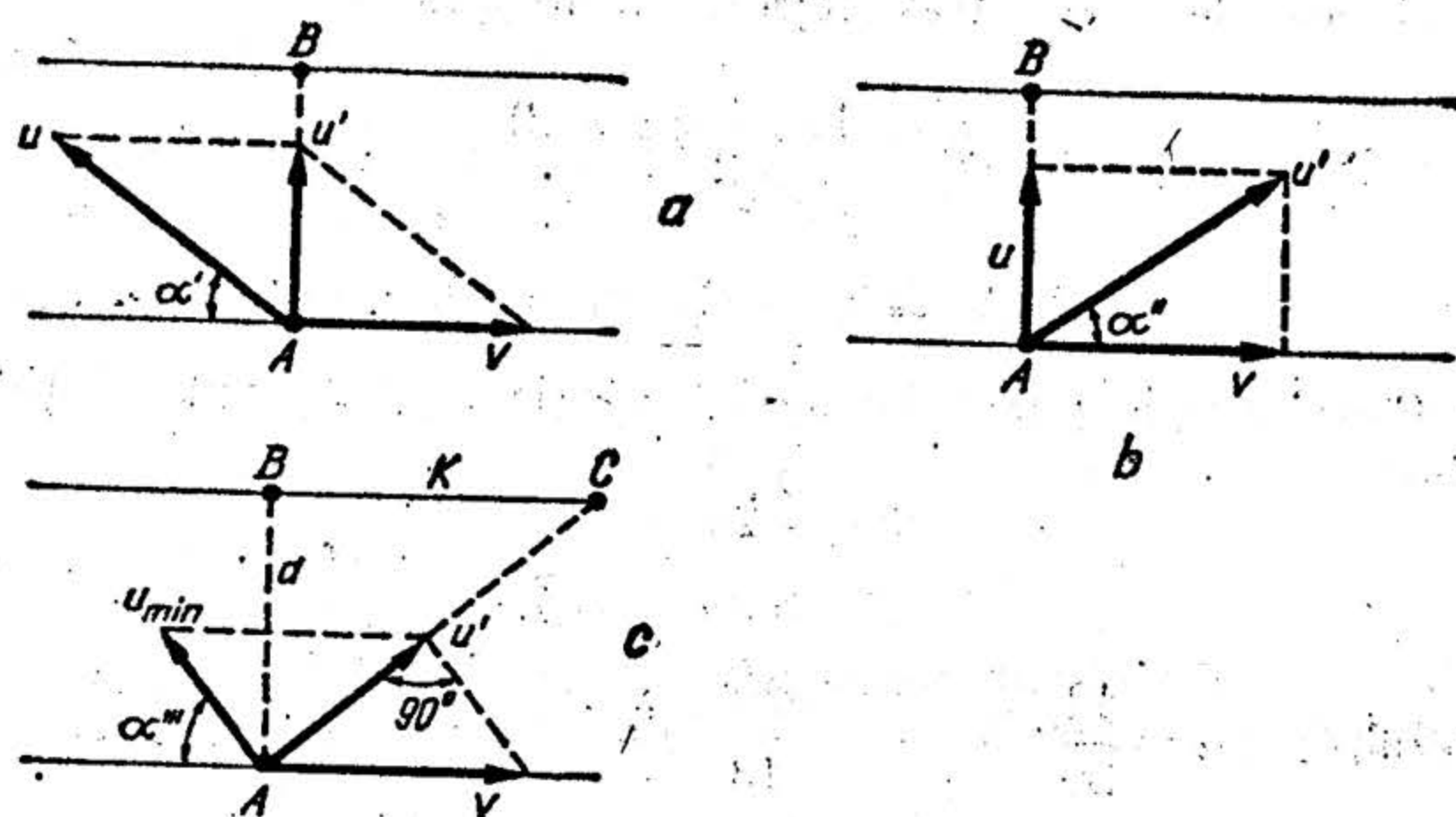


Fig. 1.14

Soluție. a) Drumul minim este, evident, traiectoria AB .

Viteza rezultantă u' trebuie să urmărească această direcție (fig. 1.14, a). Pentru aceasta este necesar ca

$$\alpha' = \arccos \frac{v}{u}. \quad (1)$$

b) În acest caz viteza u trebuie să fie dirijată după direcția AB (fig. 1.14, b), adică

$$\alpha'' = \arctg \frac{u}{v}. \quad (2)$$

c) Din interpretarea vitezei u_{min} ca diferență vectorială $u' - v$, rezultă (fig. 1.14, c) că

$$u_{min} \perp u' \quad (3)$$

deci

$$u_{min} = v \cos \alpha''' = v \frac{d}{\sqrt{d^2 + k^2}}. \quad (4)$$

1.15. Pe o șosea se mișcă uniform-rectiliniu un autoturism și un camion cu vitezele v_1 și v_2 ($v_1 > v_2$) în același sens, precum și un microbuz cu viteza v_3 ($v_2 < v_3 < v_1$), în sens contrar. La un moment dat distanța dintre autoturism și camion este d_1 . Autoturismul depășește camionul și după depășire se află, la alt moment, la distanța d_2 de acesta. Ce distanță inițială trebuie să existe între autoturism și microbuz pentru efectuarea în siguranță a manevrelor indicate (fig. 1.15)?

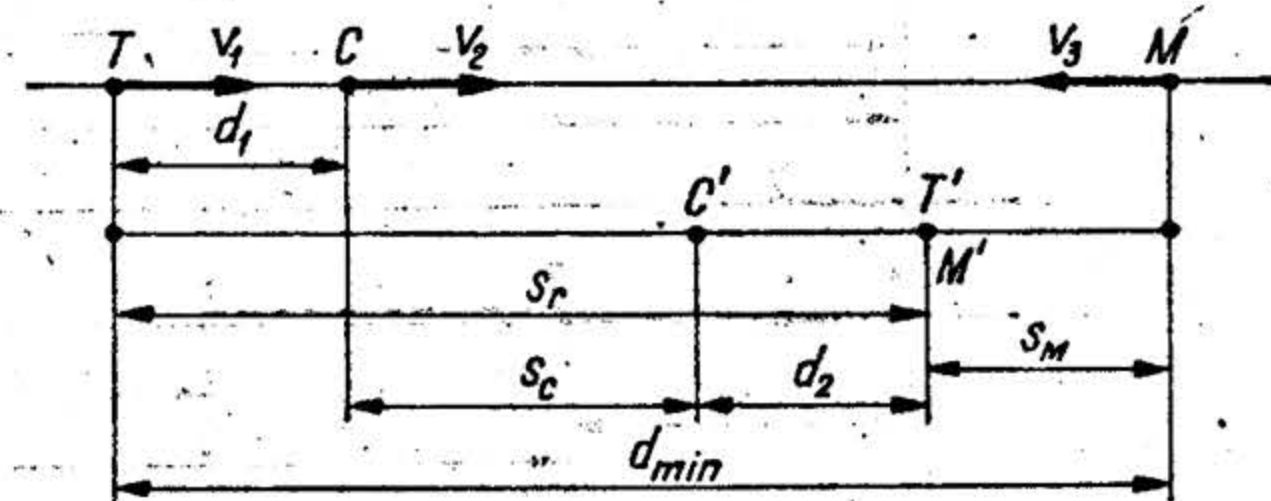


Fig. 1.15

Soluție. În figură sunt indicate prin T, C, M — pozițiile inițiale ale celor 3 vehicule, iar prin T', C', M' — pozițiile acestora după același timp t de mișcare pentru toate vehiculele. Avem

$$\begin{aligned} s_T &= v_1 t \\ s_C &= v_2 t \end{aligned} \quad (1)$$

$$s_M = v_3 t.$$

Se observă că

$$s_T = d_1 + d_2 + s_C \quad (2)$$

sau

$$v_1 t = d_1 + d_2 + v_2 t \quad (3)$$

de unde

$$t = \frac{d_1 + d_2}{v_1 - v_2} \quad (4)$$

De asemenea

$$d_{min} = s_T + s_M \quad (5)$$

de unde

$$d_{min} = \frac{(d_1 + d_2)(v_1 + v_2)}{v_1 - v_2} \quad (6)$$

1.16. Fie o cale ferată dublă pe care circulă două trenuri în același sens. Primul are viteza v_1 , iar al doilea are lungimea l_2 . Între ce limite este cuprinsă viteza celui de al doilea tren pentru ca un pasager din primul tren, care privește perpendicular pe fereastră, să vadă un timp t al doilea tren (fig. 1.16)?



Fig. 1.16

Soluție. În cazul în care $v_1 > v_2$, călătorul observă al doilea tren de la coadă la cap (fig. 1.16, a).
Avem relația

$$s_1 = s_2 + l_2 \quad (1)$$

sau

$$v_1 t = v_2 t + l_2 \quad (2)$$

de unde

$$v_2 = v_1 - \frac{l_2}{t} \quad (3)$$

În cazul când $v_1 < v_2$, călătorul observă al doilea tren de la cap la coadă; avem relația (fig. 1.16, b)

$$s_1 = s_2 - l_2 \quad (4)$$

sau

$$v_1 t = v_2 t - l_2 \quad (5)$$

de unde

$$v_2 = v_1 + \frac{l_2}{t} \quad (6)$$

deci

$$v_{2min} = v_1 - \frac{l_2}{t} \quad (7)$$

$$v_{2max} = v_1 + \frac{l_2}{t}$$

II. MIȘCAREA RECTILINIE VARIATĂ ȘI ÎN CÎMPUL GRAVITAȚIONAL

2.1. Să se deducă ecuația mișcării unui mobil ce se desfășoară pe semi-axa Ox , cu accelerația constantă a , știind că la momentul inițial $t_0 = 0$ mobilul se află în punctul A ($OA = s_0$) și are viteza $v_A = v_0$.

Soluție. Folosim cele două ecuații diferențiale

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (2)$$

unde v și s reprezintă viteza, respectiv spațiul parcurs după timpul t . Din prima ecuație deducem

$$v = \int a dt \Rightarrow v = at + C \quad (3)$$

Știind că

$$C = v \Big|_{t=0} = v_0 \quad (4)$$

revine că viteza mobilului la un moment oarecare t este

$$v = v_0 + at. \quad (5)$$

Din a doua ecuație diferențială avem

$$s = \int v dt = \int (v_0 + at) dt \Rightarrow s = v_0 t + \frac{at^2}{2} + C'$$

Observind că

$$C' = s \Big|_{t=0} = OA = s_0 \quad (6)$$

rezultă că abscisa unui punct curent (ecuația mișcării) este

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (7)$$

În problemele în care nu se dă timpul, se folosește ecuația lui Galilei (obținută prin eliminarea timpului între ecuațiile (5) și (7))

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a(s - s_0)}. \quad (8)$$

2.2. Un mobil este aruncat pe un plan înclinat sub unghiul α cu viteza inițială v_0 . La revenire, viteza mobilului se reduce de k ori. Corpul urcă pe plan pe o anumită distanță *maximă*. Să se arate că *maximul distanței maxime* se obține dacă unghiul planului devine $\alpha' = \text{arctg } \mu$, unde μ este coeficientul de frecare pe plan (care în prealabil trebuie determinat; fig. 2.2).

Soluție. Accelerația mobilului la urcare, respectiv coborire pe plan are valoarea

$$|a_n| = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \quad (1)$$

$$a_c = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha). \quad (2)$$

Se deduce (din ecuația lui Galilei) că

$$AB = l_{\max} = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} \quad (3)$$

și se observă că

$$l_{\max} = \frac{v_0^2}{2a_n} = \frac{v'^2}{2a_c} \quad (4)$$

unde viteza de revenire este

$$v' = kv_0. \quad (5)$$

Rezultă că

$$\frac{a_c}{a_n} = k^2 \quad (6)$$

sau

$$\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} = k^2 \quad (7)$$

de unde

$$\mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 - k^2}{1 + k^2} \quad (8)$$

Se derivează l_{max} în raport cu α și se obține după anulare

$$\cos \alpha' - \mu \sin \alpha' = 0 \quad (9)$$

unde α' este unghiul indicat de problemă.

Din (9) se observă verificarea condiției date.

2.3. Pe axa $x'x$ se mișcă, în același sens, două mobile cu vitezele inițiale v_{01} și v_{02} și accelerațiile a_1 și a_2 . Ele pornesc în mișcare din același punct, dar al doilea are o întârziere t_0 .

a) Cu ce condiție este posibilă întâlnirea corpurilor?

b) După cât timp are loc o singură întâlnire a mobilelor?

c) Ce relație îndeplinesc vitezele mobilelor în momentul întâlnirii?

Soluție. a) În momentul întâlnirii abscisele celor două puncte

$$x_1 = v_{01}t + \frac{a_1}{2}t^2 \quad (1)$$

$$x_2 = v_{02}(t - t_0) + \frac{a_2}{2}(t - t_0)^2 \quad (2)$$

vor fi egale, deci ecuația

$$t^2(a_1 - a_2) + 2(v_{01} - v_{02} + a_2t_0)t - t_0^2 + 2v_{02}t_0 = 0 \quad (3)$$

trebuie să aibă discriminantul pozitiv, adică

$$(v_{01} - v_{02} + a_2t_0)^2 > (a_1 - a_2)(2v_{02}t_0 - t_0^2), \quad (4)$$

care este condiția cerută de problemă.

b) Mobilele se întâlnesc o singură dată (dacă discriminantul e nul) după timpul

$$t' = \frac{v_{02} - v_{01} - a_2t_0}{a_1 - a_2} \quad (5)$$

c) În momentul întâlnirii vitezele mobilelor au valorile

$$v_1' = v_{01} + a_1t' \quad (6)$$

$$v_2' = v_{02} + a_2(t' - t_0) \quad (7)$$

Se poate verifica că

$$v_1' = v_2' \quad (8)$$

2.4. Pe axa $x'x$ se desfășoară mișcările $x_1 = v_1t + \frac{at^2}{2}$ și $x_2 = v_2(t - t_0)$.

Să se afle întinderea maximă a domeniului de valori ale lui t_0 pentru care întâlnirea mobilelor este posibilă.

Soluție. La întâlnirea mobilelor, abscisele lor vor fi egale ($x_1 = x_2$) ceea ce conduce la

$$at^2 + 2(v_1 - v_2)t + 2v_2t_0 = 0. \quad (1)$$

Rădăcinile acestei ecuații temporale trebuie să fie reale, deci

$$(v_1 - v_2)^2 - 2av_2t_0 \geq 0. \quad (2)$$

De aici

$$0 < t_0 \leq \frac{(v_1 - v_2)^2}{2av_2}. \quad (3)$$

2.5. Un mobil intră cu viteza v_0 într-un mediu rezistent și după ce străbate distanța d viteza lui devine v ($v < v_0$).

Pe ce distanță maximă poate înainta corpul în mediul respectiv? Care este timpul maxim de deplasare?

Soluție. Distanța cerută este atinsă în momentul opririi corpului ($v = 0$). Din ecuațiile

$$v^2 = v_0^2 + 2ad \quad (1)$$

$$0 = v_0^2 + 2ad_{max} \quad (2)$$

deducem

$$d_{max} = -\frac{v_0^2}{v^2 - v_0^2}d \quad (3)$$

unde a este accelerația mobilului în mediul considerat.

Maximul timpului de mișcare se obține tot la anularea vitezei, adică

$$0 = v_0 + at_{max} \quad (4)$$

de unde

$$t_{max} = -\frac{2dv_0}{v^2 - v_0^2} \quad (5)$$

2.6. Un mobil execută o mișcare rectilinie conform ecuației $x = 5t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$. Să se determine în ce moment viteza mobilului este maximă și care este această valoare.

Soluție. Derivând ecuația mișcării în raport cu timpul, avem

$$v = \frac{dx}{dt} = 5 + 4t - 2t^2. \quad (1)$$

Derivând în continuare, avem

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 4 - 4t. \quad (2)$$

Prin anularea ultimei derivate rezultă

$$[t]_{v=v_{\max}} = 1s. \quad (3)$$

deci

$$v_{\max} = v(1) = 7 \text{ m/s}. \quad (4)$$

2.7. Un corp cade liber de la înălțimea h , iar altul e lansat simultan de la suprafața Pământului. Ce *culminație* atinge ultimul mobil știind că e îndeplinită *condiția* ca mobilele să atingă *simultan* solul?

Soluție. Primul mobil cade liber în timpul

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1)$$

Al doilea urcă și coboară în timpul

$$t_2 = 2t_n = \frac{2v_0}{g} \quad (2)$$

Mobilele ating simultan solul dacă $t_1 = t_2$, adică

$$\frac{2v_0}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (3)$$

de unde

$$v_0 = \frac{g}{2} \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (4)$$

Înălțimea maximă a corpului al doilea va fi

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{h}{4}. \quad (5)$$

2.8. O bară cu lungimea l se deplasează în lungul axei $x'x$ cu accelerația a . Un punct material se află în planul xOy la o anumită înălțime. Ce valoare poate să aibă această înălțime pentru ca punctul material să poată atinge, în cădere liberă, bara mobilă? (Inițial, punctul se află pe verticala extremității drepte a barei.)

Soluție. Punctul material cade liber în timpul

$$t' = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1)$$

iar bara se deplasează, pe un spațiu egal cu lungimea ei, în timpul

$$t'' = \sqrt{\frac{2l}{a}}. \quad (2)$$

Cei doi timpi trebuie să fie egali, deci

$$\frac{h}{g} = \frac{l}{a}. \quad (3)$$

Se observă că pentru $t' = 0 \Rightarrow h = 0$ și pentru $t' = \sqrt{\frac{2l}{a}}$ avem $h = gl/a$. Înălțimea cerută va satisface relația

$$0 \leq h \leq \frac{gl}{a}. \quad (4)$$

2.9. De la ce înălțime trebuie să cadă liber un corp astfel ca o distanță dată l ($l < h$) să fie parcursă în *ultimele* n secunde?

Soluție. Din enunț rezultă că

$$h = \frac{gt^2}{2}. \quad (1)$$

$$h - l = \frac{g(t-n)^2}{2}. \quad (2)$$

De aici, timpul total de cădere (pe toată înălțimea) este

$$t = \frac{2l + gn^2}{2ng}. \quad (3)$$

Înălțimea cerută este

$$h = \frac{1}{8g} \left(\frac{2l + gn^2}{n} \right)^2. \quad (4)$$

2.10. Un corp cade liber de la înălțimea h . În cât timp este parcursă distanța kh ($k < 1$) știind că ea este plasată la distanța *egală* de punctele extreme ale căderii libere (fig. 2.10)?

Soluție. Distanța AB are valoarea

$$AB = h' = \frac{h}{2} - \frac{kh}{2} = (1 - k) \frac{h}{2} \quad (1)$$

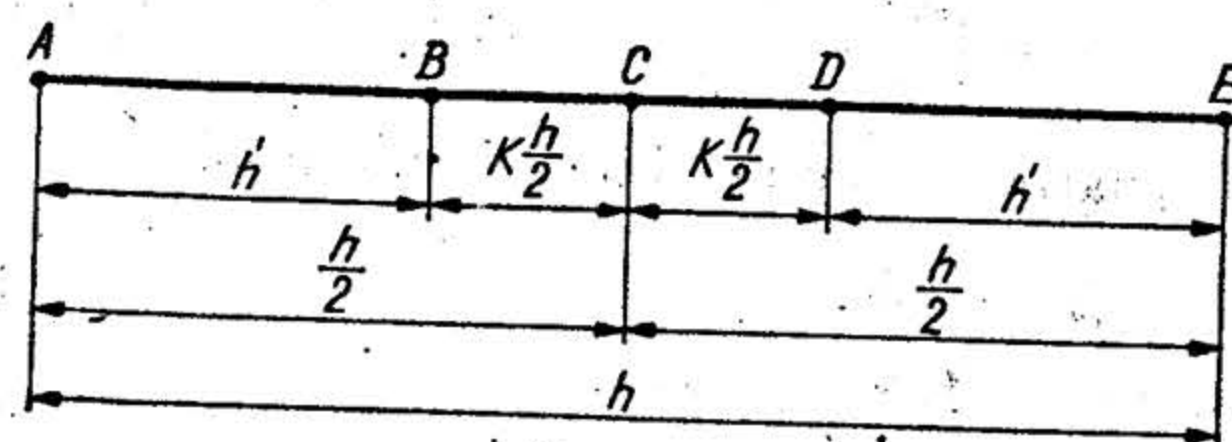


Fig. 2.10.

și este străbătută în timpul

$$t_1 = \sqrt{\frac{(1 - k)h}{g}} \quad (2)$$

Distanța AD are valoarea

$$AD = \frac{h}{2} + \frac{kh}{2} = (1 + k) \frac{h}{2} \quad (3)$$

și este străbătută în timpul

$$t_2 = \sqrt{\frac{(1 + k)h}{g}} \quad (4)$$

Timpul cerut de problemă are valoarea

$$t = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}} (\sqrt{1 + k} - \sqrt{1 - k}). \quad (5)$$

2.11. Un corp cade liber astfel încât în *ultimele* k secunde parcurge a n -a parte din înălțimea totală. În cât timp cade liber corpul pe întreaga distanță?

Soluție. Avem, evident.

$$h = \frac{gt^2}{2} \quad (1)$$

Din enunț ai rezultat că distanța $h - \frac{h}{n}$ este parcursă în timpul de $t - k$ secunde, deci

$$h - \frac{h}{n} = \frac{g}{2} (t - k)^2 \quad (2)$$

Rezultă

$$t^2 - 2nkt + nk^2 = 0 \quad (3)$$

de unde timpul cerut va fi

$$t = nk \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right). \quad (4)$$

2.12. Un corp cade liber în apă, de la înălțimea h_1 deasupra apei și după t secunde revine la suprafață fără să atingă fundul vasului (adâncimea apei este h). Se cere *condiția* ca și la o nouă cădere de la înălțimea kh_1 ($k > 1$) mobilul să *nu* atingă fundul apei.

Soluție. Corpul atinge apa cu viteza inițială $v_0 = \sqrt{2gh_1}$. El pătrunde în apă, unde are o accelerație $a < 0$ și în final se oprește, adică

$$0 = v_0 - at_1 \quad (1)$$

de unde timpul de oprire t_1 va fi

$$t_1 = \frac{v_0}{a}. \quad (2)$$

Corpul ajunge la suprafață în același timp t_1 , deci

$$t = 2t_1 = \frac{2v_0}{a} = \frac{2}{a} \sqrt{2gh_1} \quad (3)$$

de unde

$$a = \frac{2}{t} \sqrt{2gh_1}. \quad (4)$$

Viteza de impact la a doua cădere este

$$v_0' = \sqrt{2gkh_1}, \quad (5)$$

Deci, corpul coboară la adâncimea

$$h' = \frac{v_0'^2}{2a} = \frac{kt}{4} \sqrt{2gh_1}. \quad (6)$$

Corpul *nu* atinge fundul vasului dacă $h' < h$, adică

$$1 < k < \frac{4h}{t \sqrt{2gh_1}}. \quad (7)$$

2.13. Mișcarea rectilinie uniform variată e caracterizată de mărimi: spațiul s , viteza la un moment dat v , viteza inițială v_0 , accelerația a și timpul de mișcare t . Cu aceste mărimi se pot alcătui probleme „directe”, rezolvabile prin trecerea directă a datelor în formele adecvate.

Să se afle numărul *maxim* de astfel de tipuri de probleme.

Soluție. Se poate observa că sînt necesare 3 mărimi cunoscute pentru a determina două necunoscute. Numărul de probleme cerut este

$$N_{\max} = C_3^5 = 10.$$

Structura tipurilor de probleme este dată în tabelul de mai jos:

Nr. crt.	Date	Necunoscute	Modul de determinare a necunoscutelor
1.	v_0, v, a	s, t	$t = \frac{v - v_0}{a}$ $s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$
2.	v_0, v, s	a, t	$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$ $t = \frac{2s}{v + v_0}$
3.	v_0, t, s	a, v	$a = \frac{2(s - v_0 t)}{t^2}$ $v = v_0 + \frac{2(s - v_0 t)}{t}$
4.	v_0, a, t	s, v	$v = v_0 + at$ $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$
5.	v, a, t	v_0, s	$v_0 = v - at$ $s = vt - \frac{at^2}{2}$
6.	v, a, s	v_0, t	$v_0 = \sqrt{v^2 - 2as}$ $t = \frac{v - \sqrt{v^2 - 2as}}{a}$
7.	v, t, s	a, v_0	$a = \frac{2(vt - s)}{t^2}$ $v_0 = \frac{2s - vt}{t}$
8.	a, t, s	v, v_0	$v = \frac{2s + at^2}{2t}$ $v_0 = \frac{2s - at^2}{2t}$
9.	v, v_0, t	a, s	$a = \frac{v - v_0}{t}$ $s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t$
10.	v_0, a, s	v, t	$v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$ $t = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2as} - v_0}{a}$

2.14. Două mobile pornesc simultan din punctele A și B , aflate la distanța d , unul spre altul, cu vitezele inițiale v_{01} și v_{02} și cu accelerațiile a_1 și a_2 (care pot fi atât pozitive cît și negative). Ce relație trebuie să îndeplinească accelerațiile pentru ca mobilele să se întâlnească o singură dată?

Soluție. Ecuațiile de mișcare ale mobilelor sînt

$$s_1 = v_{01}t + \frac{a_1 t^2}{2} \quad (1)$$

$$s_2 = v_{02}t + \frac{a_2 t^2}{2} \quad (2)$$

Este evident că

$$s_1 + s_2 = d \quad (3)$$

de unde

$$(a_1 + a_2)t^2 - 2(v_{01} + v_{02})t - 2d = 0. \quad (4)$$

Pentru o singură întîlnire e necesar ca

$$(v_{01} + v_{02})^2 + 2d(a_1 + a_2) = 0 \quad (5)$$

de unde condiția cerută se scrie

$$a_1 + a_2 = -\frac{1}{2d}(v_{01} + v_{02})^2. \quad (6)$$

2.15. Un mobil este aruncat de jos în sus încît în secunda de ordinul k ($k < t_n$) corpul parcurge distanța dată h_k . Să se afle momentele de timp în care mobilul trece prin *mijlocul înălțimii maxime* atinsă de corp.

Soluție. Există relația

$$h_k = v_0 k - \frac{gk^2}{2} - \left[v_0(k-1) - \frac{g}{2}(k-1)^2 \right] \quad (1)$$

de unde viteza inițială de lansare este

$$v_0 = \frac{2h_k + 2gk - g}{2} \quad (2)$$

Se construiește ecuația

$$v_0 t' - \frac{g}{2} t'^2 = \frac{h_{\max}}{2} = \frac{v_0^2}{4g} \quad (3)$$

de unde

$$16g^2t'^2 - (16gh_k + 16g^2k - 8g^2)l' + 4h_k^2 + 8g^2k^2 + g^2 + 8gkh_k - 2gh_k - 2g^2k = 0. \quad (4)$$

Rezolvind această ecuație, vom găsi totdeauna două valori pozitive neegale ale timpului. Valoarea mai mică reprezintă timpul după care mobilul trece, în urcare, prin mijlocul culminației, iar valoarea mai mare reprezintă același moment la coborire.

2.16. Un corp alunecă pe un plan înclinat de lungime l și înălțime h . Coeficientul de frecare este μ . Să se afle viteza maximă și să se indice condiția de posibilitate a problemei (fig. 2.16).

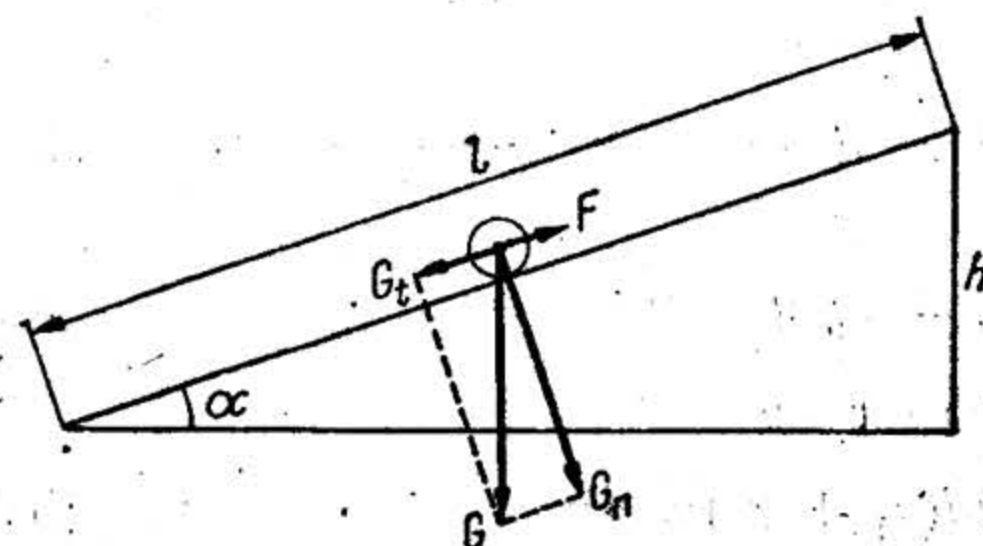


Fig. 2.16

Soluție. Se observă că

$$\sin \alpha = \frac{h}{l} \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} \quad (2)$$

Corpul este acționat de forțele

$$G_t = mg \sin \alpha = mg \frac{h}{l} \quad (3)$$

și

$$F_r = \mu mg \cos \alpha = \mu mg \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} \quad (4)$$

Rezultanta lor produce coborirea accelerată a corpului și are valoarea

$$ma_c = G_t - F_r \quad (5)$$

iar accelerația imprimată

$$a_c = \frac{g}{l} (h - \mu \sqrt{l^2 - h^2}). \quad (6)$$

Corpul coboară în timpul

$$t_c = \sqrt{\frac{2l}{a_c}} = l \sqrt{\frac{2}{g(h - \mu \sqrt{l^2 - h^2})}} \quad (7)$$

Viteza maximă se va obține, evident, la baza planului și are mărimea

$$V_{max} = a_c t_c = \sqrt{2g(h - \mu \sqrt{l^2 - h^2})}. \quad (8)$$

Se impune ca

$$h > \mu \sqrt{l^2 - h^2}. \quad (9)$$

2.17. Un mobil este aruncat sub unghiul α față de orizontală cu viteza inițială v_0 . Se cere:

a) În ce moment mobilul atinge înălțimea maximă și ce valoare are această înălțime?

b) După cit timp mobilul se află cel mai departe pe orizontală și ce valoare are această distanță?

c) În ce moment viteza mobilului este minimă și ce valoare are această viteză?

d) Pentru ce unghi de lansare depărtarea maximă pe orizontală este cea mai mare?

e) Să se arate cum se reduce aruncarea oblică la alte mișcări mai simple din câmpul gravitațional. (fig. 2.17)?

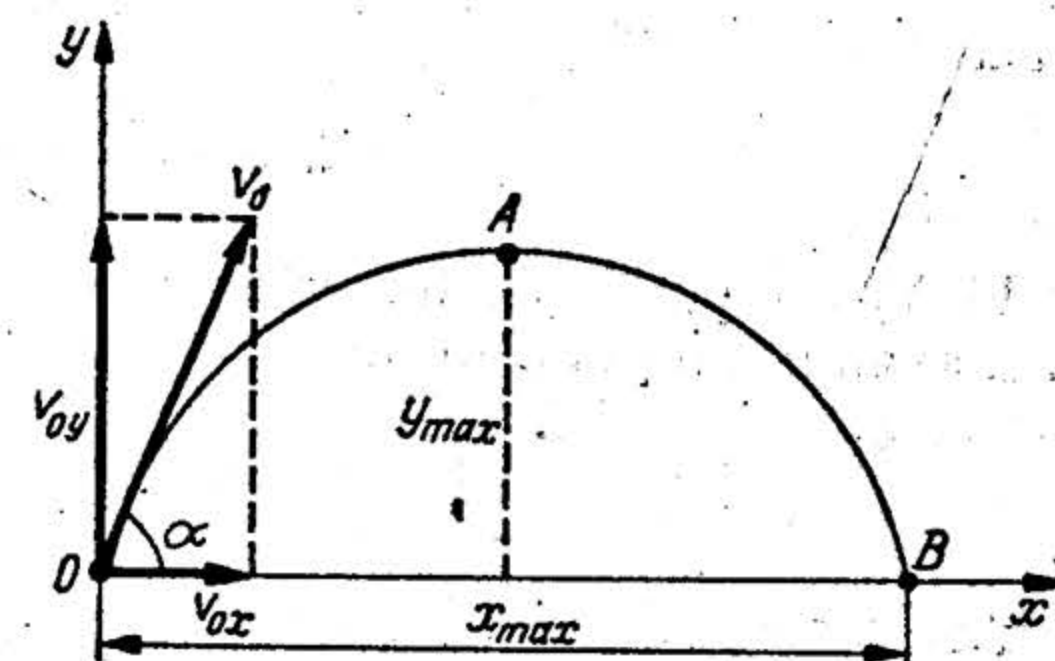


Fig. 2.17.

Soluție. Aruncarea oblică este compusă dintr-o translație uniformă pe orizontală și o mișcare uniform-încetinită, cu accelerația $a = -g$, pe verticală.

Viteza inițială se descompune în două componente

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} &= v_0 \sin \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

astfel încît coordonatele punctului la un moment dat t vor fi

$$x = v_{0x} t = v_0 t \cos \alpha \quad (2)$$

$$y = v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2 = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \quad (3)$$

Prin eliminarea timpului între ecuațiile parametrice (2) și (3) se obține ecuația traiectoriei

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (4)$$

a) Acest trinom de gradul II admite un extrem (un maxim, căci $a < 0$) pentru

$$x_{max} = \frac{tg \alpha}{\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \quad (5)$$

ceea ce conduce la

$$y_{max} = y \Big|_{x=x_{max}} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (6)$$

Observind că

$$x_{max} = v_0 t_{max} \cos \alpha \quad (7)$$

avem

$$t_{max} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (8)$$

b) Virful parabolei împarte graficul în două părți egale. Rezultă că maximul timpului de deplasare va fi

$$t_{max} = 2t_{max} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (9)$$

Analog, maximul distanței pe orizontală va fi

$$x'_{max} = 2x_{max} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha \quad (10)$$

c) La un moment dat t , proiecțiile vitezei pe cele două axe vor fi

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad (11)$$

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt \quad (12)$$

astfel că avem

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t \sin \alpha + g^2 t^2} \quad (13)$$

Derivata vitezei în raport cu timpul este

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t - v_0 g \sin \alpha}{v} \quad (14)$$

Din anularea ei se obține

$$t \Big|_{v=v_{min}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (15)$$

și respectiv

$$v_{min} = v_0 \cos \alpha \quad (16)$$

adică minimul vitezei se obține în punctul culminant al traiectoriei.

d) Este clar că trebuie ca

$$\sin 2\alpha = 1 = \sin 90^\circ; \quad (17)$$

de aici, unghiul care îndeplinește condiția cerută este $\alpha_0 = 45^\circ$.

e) Pentru $\alpha = -90^\circ$ și $v_0 = 0$ avem cădere liberă; pentru $\alpha = 0^\circ$ avem aruncare pe orizontală; pentru $\alpha = 90^\circ$ avem aruncare de jos în sus; pentru $\alpha = -90^\circ$ avem aruncare de sus în jos.

2.18. Un mobil este aruncat în sus cu viteza inițială v_{01} . După o întârziere t_0 este aruncat al doilea mobil cu viteza inițială v_{02} ($v_{02} > v_{01}$) (fig. 2.18). Se cere:

a) Să se determine valorile de extrem ale elementelor mișcării primului mobil.

b) Ce condiție trebuie să îndeplinească întârzierea t_0 pentru ca mobilele să se întâlnească:

1) în punctul culminant atins de primul mobil;

2) la urcarea ambelor mobile;

3) la coborîrea primului și urcarea celui de al doilea?

c) În ipoteza că $v_{01} > v_{02}$, ce valoare trebuie să aibă întârzierea t_0 pentru ca timpul după care primul mobil se întâlnește cu al doilea să fie minim.

Soluție. a) Aruncarea de jos în sus e compusă dintr-o mișcare uniform rectilinie pe verticală în sus cu viteza v_0 și o cădere liberă, rezultând o mișcare uniform încetinită cu accelerația $a = -g$. Viteza, respectiv spațiul la un moment dat vor fi

$$v = v_0 - gt \quad (1)$$

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad (2)$$

Trinomul (2) admite un maxim pentru timpul

$$t_{max} = t_u = \frac{v_0}{g} \quad (3)$$

care reprezintă și timpul de urcare a mobilului. Introdusă în (2) această valoare ne dă înălțimea maximă atinsă de corp, iar introdusă în (1) ne dă viteza minimă a mobilului. Avem deci

$$t_{u_1} = \frac{v_{01}}{g} \quad (4)$$

$$h_{max 1} = h \Big|_{t=t_{u_1}} = \frac{v_{01}^2}{2g} \quad (5)$$

$$v_{min} = v \Big|_{t=t_{u_1}} = 0 \quad (6)$$

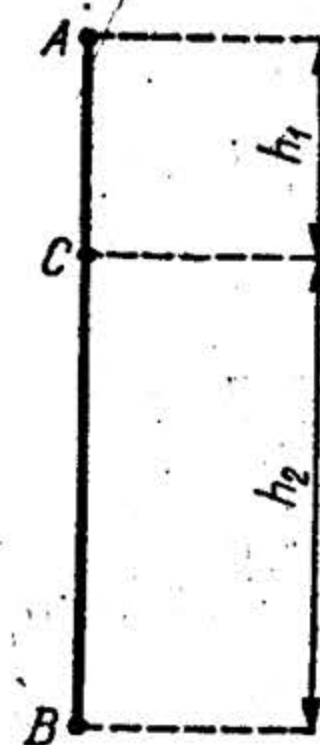


Fig. 2.18

b) 1) Din text rezultă că timpul de mișcare a primului mobil (de la plecare pînă la întîlnire) este egal cu timpul de urcare (4), iar altitudinea de întîlnire este

$$h_1 = h_{max 1} = \frac{v_{01}^2}{2g} \quad (7)$$

În aceste condiții, mobilul al doilea se mișcă pe distanța

$$h_2 = v_{02}(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2 = h_{max 1} \quad (8)$$

sau

$$v_{02}\left(\frac{v_{01}}{g} - t_0\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{v_{01}}{g} - t_0\right)^2 = \frac{v_{01}^2}{2g} \quad (9)$$

sau

$$g^2 t_0^2 - 2(v_{01}g - v_{02}g)t_0 + 2v_{01}^2 - 2v_{01}v_{02} = 0 \quad (10)$$

Soluția acestei ecuații (convine numai semnul plus în fața radicalului) ne dă condiția cerută

$$t_0 = \frac{v_{01} - v_{02} + \sqrt{v_{02}^2 - v_{01}^2}}{g} \quad (11)$$

2) În acest caz trebuie ca

$$t_0 < \frac{v_{01} - v_{02} + \sqrt{v_{02}^2 - v_{01}^2}}{g} \quad (12)$$

3) E necesar ca

$$t_0 > \frac{v_{01} - v_{02} + \sqrt{v_{02}^2 - v_{01}^2}}{g} \quad (13)$$

c) În ipoteza impusă de problemă, întîlnirea e posibilă numai la coborîrea primului mobil (respectiv urcarea celui de al doilea). Primul mobil pleacă din punctul A și se întîlnește cu al doilea în C pe distanța

$$h_1 = \frac{gt^2}{2} \quad (14)$$

Al doilea mobil se mișcă din B în C pe distanța

$$h_2 = v_{02}(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2 \quad (15)$$

Se observă că

$$h_1 + h_2 = \frac{v_{01}^2}{2g} = \frac{gt^2}{2} + v_{02}(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2 \quad (16)$$

Derivata distanței AB în raport cu t_0 este

$$\frac{d(AB)}{dt_0} = -v_{02} + g(t - t_0) \quad (17)$$

Se anulează (17) și se obține

$$t - t_0 = \frac{v_{02}}{g} \quad (18)$$

care, introdusă în (16), ne dă

$$t = \frac{1}{g} \sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2} \quad (19)$$

de unde

$$t_0 = \frac{-v_{02} + \sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}}{g} \quad (20)$$

2.19. Un corp cade liber de la înălțimea h . Se cere:

- Spațiul parcurs în ultima secundă.
- Timpul în care e parcursă ultima porțiune $h' < h$.
- Să se împartă înălțimea în n părți care să fie în același interval de timp. Să se afle valorile porțiunilor.
- Să se împartă înălțimea în n părți egale și să se afle intervalele de timp respective (fig. 2.19).

Soluție. a) Timpul total de cădere este

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (1)$$

adică, pînă la ultima secundă (exclusiv), căderea durează

$$t' = t - 1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - 1 \quad (2)$$

În timpul t' corpul cade liber pe distanța

$$h' = \frac{g}{2} t'^2 = h + \frac{g}{2} - g \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3)$$

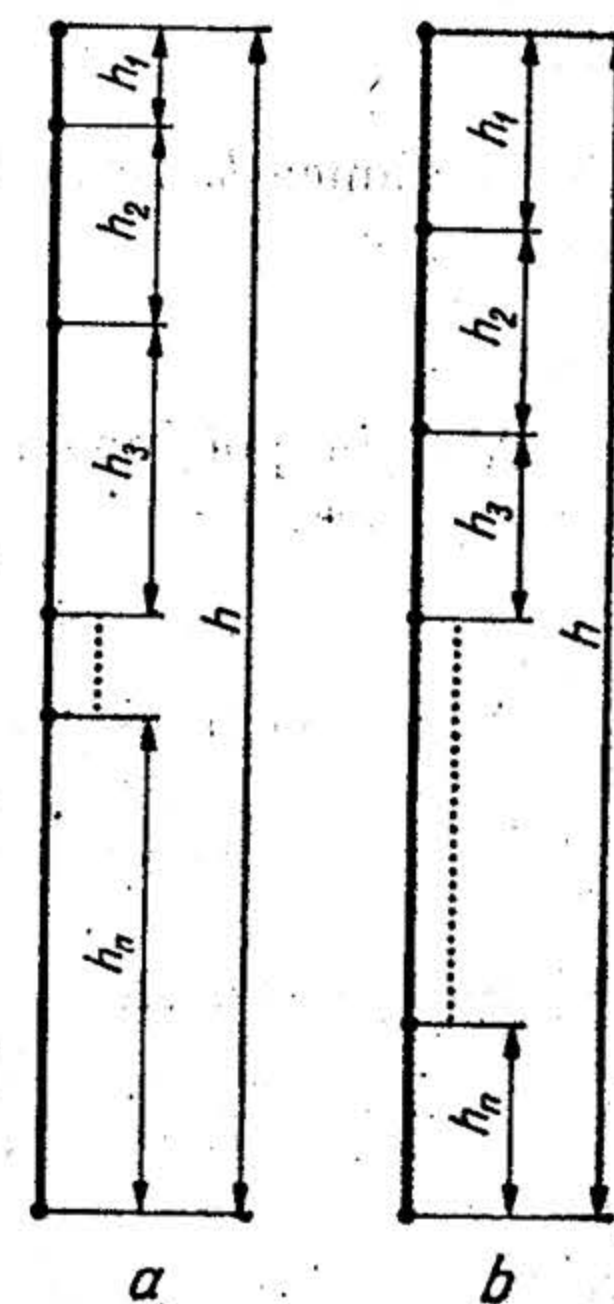


Fig. 2.19.

Pentru ultima secundă, rămâne distanța

$$h' = h - h' = g \left[\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{1}{2} \right]. \quad (4)$$

b) Timpul în care e parcursă distanța $h' - h'$ este

$$t' = \sqrt{\frac{2(h - h')}{g}}. \quad (5)$$

Pentru ultima porțiune rămâne timpul

$$t'' = t - t' = \frac{1}{\sqrt{g}} [\sqrt{2h} - \sqrt{2(h - h')}] \quad (6)$$

c) Fie h_1, h_2, \dots, h_n , porțiunile în cauză. Este evident că

$$h_1 < h_2 < h_3 < \dots < h_{n-1} < h_n \quad (7)$$

$$h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_{n-1} + h_n = h. \quad (8)$$

Porțiunea h_1 este parcursă în timpul t , adică

$$h_1 = \frac{gt^2}{2} = 1 \cdot \frac{gt^2}{2} \quad (9)$$

Porțiunea h_2 respectă relația

$$h_2 = \frac{g}{2} (2t)^2 - \frac{g}{2} t^2 = 3 \cdot \frac{gt^2}{2} \quad (10)$$

A treia porțiune respectă relația

$$h_3 = \frac{g}{2} (3t)^2 - \frac{g}{2} (2t)^2 = 5 \frac{gt^2}{2} \quad (11)$$

A n -a porțiune va fi

$$h_n = \frac{g}{2} (nt)^2 - \frac{g}{2} [(n-1)t]^2 = (2n-1) \frac{gt^2}{2} \quad (12)$$

Se observă că

$$\frac{h_1}{1} = \frac{h_2}{3} = \frac{h_3}{5} = \dots = \frac{h_n}{2n-1} \quad (13)$$

$$\frac{h_1 + h_2 + \dots + h_n}{1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1} = \frac{h}{n^2} \quad (14)$$

de unde

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{n^2} h \\ h_2 &= \frac{3}{n^2} h \\ h_3 &= \frac{5}{n^2} h \\ &\vdots \\ h_n &= (2n-1) \frac{1}{n^2} h \end{aligned} \quad (15)$$

d) Se observă că

$$h_1 = h_2 = h_3 = \dots = h_n = \frac{h}{n} \quad (16)$$

Timpul în care este parcursă distanța h_1 este dat de relația

$$h_1 = \frac{h}{n} = \frac{gt_{01}^2}{2} \quad (17)$$

de unde

$$t_{01} = \sqrt{\frac{2h}{ng}} (\sqrt{1} - \sqrt{0}). \quad (18)$$

Timpul în care este parcursă distanța $h_1 + h_2$ e dat de relația

$$h_1 + h_2 = \frac{2h}{n} = \frac{gt_{02}^2}{2} \quad (19)$$

de unde

$$t_{02} = \sqrt{\frac{4h}{ng}} \quad (20)$$

Deci, timpul în care este parcursă numai distanța h_2 va fi

$$t_{12} = t_{02} - t_{01} = \sqrt{\frac{2h}{ng}} (\sqrt{2} - \sqrt{1}). \quad (21)$$

Analog, găsim

$$t_{23} = \sqrt{\frac{2h}{ng}} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \quad (22)$$

⋮

$$t_{n-1, n} = \sqrt{\frac{2h}{ng}} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

2.20. O parașută cade de la o înălțime oarecare în timpul t . Ea are masa m și se mișcă uniform rectiliniu un timp t' secunde ($t' = kt$; $k < 1$). Să se afle raza cercului mare al parașutei și înălțimea de cădere. (Se presupun cunoscute constanta C de la rezistența la înaintare și densitatea ρ a aerului (fig. 2.20.)

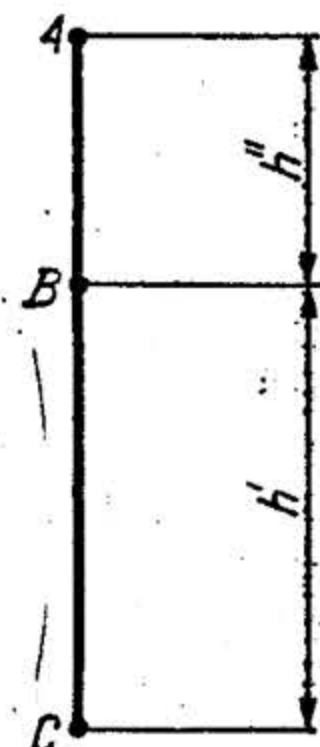


Fig. 2.20.

Soluție. Dacă porțiunea BC este parcursă în timpul t' , rezultă că porțiunea AB (căderea liberă) e parcursă în timpul

$$t'' = t - t' = t(1 - k). \quad (1)$$

Viteza maximă (viteza limită) e atinsă în punctul B , adică

$$v_B = v_{max} = v_{limită} = gt'' = gt(1 - k). \quad (2)$$

La atingerea acestei viteze, greutatea G a parașutei este egală cu rezistența la înaintare R

$$mg = CS\rho v_{max}^2 \quad (3)$$

sau

$$\pi r^2 C \rho v_{max}^2 = mg \quad (4)$$

de unde

$$r = \frac{1}{t(1 - k)} \sqrt{\frac{m}{\pi C \rho g}}. \quad (5)$$

Înălțimea totală de cădere este

$$h = h' + h'' = \frac{gt'^2}{2} + v_{max} \cdot t' \quad (6)$$

de unde

$$h = \frac{gt^2}{2} (1 - k^2). \quad (7)$$

2.21. O bilă cade liber de la înălțimea h și se lovește de un plan orizontal. După fiecare ciocnire, viteza de revenire pe verticală se reduce de k ($k > 1$) ori. Să se calculeze spațiul maxim parcurs de corp și timpul total de mișcare.

Soluție. Se alcătuieste tabelul:

Nr. de ordine al ciocnirii	Viteza		Timpul		Înălțimea	
	Înainte de ciocnire	După ciocnire	De cădere spre plan	De urcare după ciocnire	Înainte de ciocnire	După ciocnire
1	$v_{01} = \sqrt{2gh}$	$v_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{k}$	$t_{01} = \frac{\sqrt{2gh}}{g}$	$t_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{kg}$	$h_{01} = h$	$h_1 = \frac{h}{k^2}$
2	$v_{02} = \frac{\sqrt{2gh}}{k}$	$v_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{k^2}$	$t_{02} = \frac{\sqrt{2gh}}{kg}$	$t_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{k^2g}$	$h_{02} = \frac{h}{k^2}$	$h_2 = \frac{h}{k^4}$
3	$v_{03} = \frac{\sqrt{2gh}}{k^2}$	$v_3 = \frac{\sqrt{2gh}}{k^3}$	$t_{03} = \frac{\sqrt{2gh}}{k^2g}$	$t_3 = \frac{\sqrt{2gh}}{k^3g}$	$h_{03} = \frac{h}{k^4}$	$h_3 = \frac{h}{k^6}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$v_{0n} = \frac{\sqrt{2gh}}{k^{n-1}}$	$v_n = \frac{\sqrt{2gh}}{k^n}$	$t_{0n} = \frac{\sqrt{2gh}}{k^{n-1}g}$	$t_n = \frac{\sqrt{2gh}}{k^ng}$	$h_{0n} = \frac{h}{k^{2n-2}}$	$h_n = \frac{h}{k^{2n}}$

Se observă că

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{02} \\ h_2 &= h_{03} \\ &\vdots \\ h_{n-1} &= h_{0n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Spațiul parcurs de corp va fi

$$s = h + 2h \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^6} + \dots + \frac{1}{k^{2n}} \right) \quad (2)$$

sau

$$s = h + 2h \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{k^2}} = h \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}. \quad (3)$$

Se observă că

$$\begin{aligned} t_1 &= t_{02} \\ t_2 &= t_{03} \\ &\vdots \\ t_{n-1} &= t_{0n} \end{aligned} \quad (4)$$

Timpul de mișcare va fi

$$t = \frac{\sqrt{2gh}}{g} + \frac{2\sqrt{2gh}}{g} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \dots + \frac{1}{k^n} \right) \quad (5)$$

de unde

$$t = \sqrt{2gh} \cdot \frac{k+1}{(k-1)g} \quad (6)$$

2.22. Pe axa Ox se desfășoară mișcările: $x_1 = k_1 t^2 + k_2 t + k_3$ și $x_2 = k'_1 t^2 + k'_2 t + k'_3$. Se cer:

a) momentul de timp în care distanța dintre mobile are valoarea extremă și valoarea acestei distanțe;

b) valoarea vitezei relative pentru momentul sus amintit.

Soluție. a) Distanța dintre mobile va fi

$$d = x_2 - x_1 \quad (1)$$

sau

$$d = (k'_1 - k_1)t^2 + (k'_2 - k_2)t + k'_3 - k_3 \quad (2)$$

Derivata acestei distanțe are valoarea

$$\frac{dd}{dt} = 2t(k'_1 - k_1) + k'_2 - k_2 \quad (3)$$

Prin anulară ei, avem

$$[t]_{d=d_{\text{extrem}}} = \frac{k'_2 - k_2}{2(k'_1 - k_1)} \quad (4)$$

și

$$d_{\text{extrem}} = \frac{4(k'_1 - k_1)(k'_3 - k_3) - (k'_2 - k_2)^2}{4(k'_1 - k_1)} \quad (5)$$

b) Avem

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{dx_1}{dt} = 2k_1 t + k_2 \\ v_2 &= \frac{dx_2}{dt} = 2k'_1 t + k'_2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$v_r = v_2 - v_1 = 2t(k'_1 - k_1) + k'_2 - k_2.$$

Pentru timpul calculat anterior, avem: $v_r = 0$,

2.23. Pe axa Ox se desfășoară două mișcări astfel încât distanțele mobilelor la originea O a axei sînt rădăcinile ecuației: $k_1 x^2 + k_2 x + k_3 t + k_4 = 0$. Se cer momentele de timp după care cele două distanțe sînt egale.

Soluție. Cele două distanțe au valorile

$$x_{1,2} = \frac{-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 4k_1(k_3 t + k_4)}}{2k_1} \quad (1)$$

Distanțele sînt egale dacă

$$k_2^2 - 4k_1(k_3 t + k_4) = 0 \quad (2)$$

sau

$$k_2^2 - 4k_1 k_3 t - 4k_1 k_4 = 0 \quad (3)$$

de unde

$$t_{1,2} = \frac{2k_1 k_3 \pm \sqrt{k_1^2 k_3^2 + 4k_1 k_4 k_3}}{k_3^2} \quad (4)$$

care sînt momentele cerute de problemă.

2.24. Pe axa $x'x$ se desfășoară o mișcare descrisă de relația: $x = k_1 t^3 + k_2 t^2 + k_3 t + k_4$. Se cere să se deducă valoarea accelerației mobilului în momentul în care abscisa mișcării trece printr-un extrem.

Soluție. Avem

$$v = \frac{dx}{dt} = 3k_1 t^2 + 2k_2 t + k_3 = 0 \quad (1)$$

de unde

$$t_{1,2} = \frac{-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 3k_1 k_3}}{3k_1} \quad (2)$$

Știind că

$$a = \frac{dv}{dt} = 6k_1t + 2k_2 \quad (3)$$

avem

$$[a]_{t_1} = 2 \sqrt{k_2^2 - 3k_1k_3} \quad (4)$$

$$[a]_{t_1} = -2 \sqrt{k_2^2 - 3k_1k_3}$$

2.25. Pe axa $x'x$ se desfășoară mișcările care verifică relația:
 $x_1 = 1 - \operatorname{tg} t$; $x_1x_2 + x_1 - x_2 = 0$.

Ce relație verifică vitezele și accelerațiile mișcărilor?

Soluție. Rezultă că

$$x_2 = \operatorname{ctg} t - 1 \quad (1)$$

Prin derivare avem

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{\sin^2 t} \quad (2)$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{\cos^2 t} \quad (3)$$

Se poate observa că

$$v_1v_2 + v_1 + v_2 = 0, \quad (4)$$

care este relația dintre viteze. Derivând în continuare, găsim

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{2 \sin t}{\cos^3 t} \quad (5)$$

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = \frac{2 \cos t}{\sin^3 t} \quad (6)$$

Găsim că

$$a_1 + a_2 = \frac{(a_1a_2 - 8) \sqrt{a_1a_2}}{4} \quad (7)$$

2.26. Pe axa $x'x$ se deplasează două mobile cu vitezele $v_1 = 2 + (10m + 7)t - (8m - 1)t^2$ și $v_2 = 1 + (50m - 5)t - (6m + 2)t^2$. Se cere:

a) Valorile parametrului m pentru care cele două viteze trec simultan prin valorile extreme și să se determine acest moment temporal.

b) Ce distanță separă cele două mobile în momentul în care vitezele lor sînt maxime?

Soluție. a) Se derivează cele două viteze în raport cu timpul:

$$\frac{dv_1}{dt} = 10m + 7 - 2t(8m - 1) \quad (1)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = 50m - 5 - 2t(6m + 2).$$

Derivatele se anulează după timpii:

$$t_1 = \frac{10m + 7}{2(8m + 1)} \quad (2)$$

$$t_2 = \frac{50m - 5}{2(6m + 2)}$$

Condiția de simultaneitate este îndeplinită dacă: $t_1 = t_2 \Rightarrow m = 0,5$, una din soluții.

Deci, vitezele devin

$$\begin{aligned} v_1 &= 2 + 12t - 3t^2 \\ v_2 &= 1 + 20t - 5t^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Momentul temporal cerut va fi

$$[t = t_1 = t_2]_{m=0,5} = 2 \text{ s.}$$

b) Pînă în acest moment primul mobil a parcurs distanța

$$x_1 = \int_0^2 v_1 dt = \int_0^2 (2 + 12t - 3t^2) dt = 20 \text{ metri} \quad (4)$$

iar al doilea

$$x_2 = \int_0^2 v_2 dt = \int_0^2 (1 + 20t - 5t^2) dt = \frac{86}{3} \text{ metri} \quad (5)$$

deci

$$d = x_2 - x_1 = 8,67 \text{ m.} \quad (6)$$

2.27. Se consideră o aruncare de jos în sus și un punct M curent cuprins între punctul de lansare A și cel culminant B (fig. 2.27).

Să se demonstreze că:

a) Viteza în punctul curent, la urcare, este egală în modul cu viteza la revenirea mobilului în punctul curent.

b) Timpul necesar parcurgerii distanței MB este egal cu cel necesar parcurgerii distanței BM .

Soluție. a) Fie v_0 viteza inițială de lansare. Atunci

$$(v_M)_{urcare} = v_0 - gt \quad (1)$$

unde t este timpul de mișcare pe AM , sau

$$(v_M)_{urcare} = \sqrt{v_0^2 - 2gh}. \quad (2)$$

Avem

$$h' = h_{max} - h = \frac{v_0^2}{2g} - h = \frac{v_0^2 - 2gh}{2g}. \quad (3)$$

La coborire, avem

$$(v_M)_{coborire} = \sqrt{2gh'} = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = (v_M)_{urcare}. \quad (4)$$

b) Avem

$$t_{AM} = \frac{v_0 - v}{g} = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

$$t_{MB} = t_{AB} - t_{AM} = \frac{v_0}{g} - \left(\frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} \right) = \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}. \quad (6)$$

La coborire, avem

$$t_{BM} = \frac{(v_M)_{coborire}}{g} = \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} = t_{MB}. \quad (7)$$

2.28. Dintr-un punct pornesc pe aceeași dreaptă două mobile cu vitezele inițiale v_{01} și v_{02} ($v_{02} > v_{01}$). Ambele mobile au aceeași accelerație, iar al doilea pleacă cu t_0 secunde mai târziu ca primul. Între ce limite trebuie să fie cuprinsă accelerația mobilelor pentru ca întâlnirea lor să aibă loc după plecarea mobilelor?

Soluție. Ecuația primei mișcări (după axa Ox) este

$$x_1 = v_{01}t_1 + \frac{at_1^2}{2} \quad (1)$$

iar a celei de a doua

$$x_2 = v_{02}(t_1 - t_0) + \frac{a}{2}(t_1 - t_0)^2. \quad (2)$$

La întâlnire avem $x_1 = x_2$, de unde

$$t_1 = \frac{at_0^2 - 2v_{02}t_0}{2(v_{01} - v_{02} + at_0)} \quad (3)$$

$$t_2 = -\frac{2v_{01}t_0 + at_0^2}{2(v_{01} - v_{02} + at_0)}. \quad (4)$$

Din condiția ca $t_2 > 0$, avem

$$-2 \frac{v_{01}}{t_0} < a < \frac{v_{02} - v_{01}}{t_0} \quad (5)$$

care este condiția cerută.

2.29. Un mobil descrie o mișcare plană de ecuații parametrice: $x = mt^2 + t + 2m$; $y = t^2 + mt$ (t — este timpul, m — o constantă). Se cere valoarea lui m astfel ca raportul dintre viteza minimă a mișcării și accelerația mișcării să fie o constantă k .

Soluție. Proiecțiile vitezei pe cele două axe sînt

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2mt + 1 \quad (1)$$

$$v_y = 2t + m$$

deci viteza rezultantă va fi

$$v = \sqrt{4(m^2 + 1)t^2 + 8mt + m^2 + 1} \quad (2)$$

care devine minimă la momentul

$$[t]_{v=v_{min}} = -\frac{m}{m^2 + 1}. \quad (3)$$

Viteza minimă va fi

$$v_{min} = \frac{m^2 - 1}{\sqrt{m^2 + 1}}. \quad (4)$$

Proiecțiile accelerației vor fi

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 2m \quad (5)$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = 2$$

iar accelerația va fi

$$a = \sqrt{4m^2 + 4} = 2\sqrt{m^2 + 1}. \quad (6)$$

Avem

$$\frac{v_{min}}{a} = k = \frac{m^2 - 1}{2(m^2 + 1)} \quad (7)$$

deci

$$m = \pm \sqrt{\frac{1 + 2k}{1 - 2k}}. \quad (8)$$

2.30. Un proiectil este lansat sub un unghi oarecare față de orizontală, cu viteza inițială v_0 . Se cere valoarea unghiului de lansare pentru ca aria închisă de curba balistică să fie *maximă*.

Soluție. Se știe că aria închisă de curba balistică ideală are valoarea

$$A = \frac{v_0^4 \sin^3 \alpha \cos \alpha}{g^2} \quad (1)$$

unde α este unghiul de lansare a proiectilului. Avem

$$\frac{dA}{d\alpha} = 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^4 \alpha \quad (2)$$

sau

$$\frac{dA}{d\alpha} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (3 - \tan^2 \alpha). \quad (3)$$

Prin anularea derivatei, se obține valoarea cerută a unghiului de tragere

$$\alpha' = [\alpha]_{A=A_{max}} = 60^\circ. \quad (4)$$

2.31. Un mobil este aruncat în sus cu viteza inițială v_{01} . Se lansează pe aceeași verticală un al doilea mobil cu viteză inițială $v_{02} < v_{01}$ după o anumită întârziere. Se cere această întârziere pentru ca cele două mobile să se întâlnească la *cel mai scurt timp* de la plecarea primului mobil.

Soluție. O primă concluzie ce se desprinde din text este aceea că mobilele nu se pot întâlni decât la coborîrea primului, (din punctul culminant B corespunzător) și urcarea celui de al doilea. Fie C punctul de întâlnire în situația precizată (fig. 2.31).

Observăm că

$$AB = h_{max1} = \frac{v_{01}^2}{2g}. \quad (1)$$

Fie h_1 și h_2 spațiile parcurse de cele două mobile din momentul începerii căderii libere a primului. Avem

$$h_1 + h_2 = h_{max1} = \frac{v_{01}^2}{2g} \quad (2)$$

și

$$h_1 = \frac{gt_1^2}{2} \quad (3)$$

$$h_2 = v_{02}(t_1 - t_0) - \frac{g}{2}(t_1 - t_0)^2$$

unde t_0 este întârzierea cerută. Rezultă

$$\frac{gt_1^2}{2} + v_{02}(t_1 - t_0) - \frac{g}{2}(t_1 - t_0)^2 = \frac{v_{01}^2}{2g}, \quad (4)$$

relație ce poate fi interpretată ca o funcție implicită a lui t_1 în raport cu t_0 . Derivata ei este

$$\frac{dt_1}{dt_0} = 1 - \frac{gt_1}{v_{02} + gt_0} \quad (5)$$

care prin anulare ne dă

$$t_1 - t_0 = \frac{v_{02}}{g}. \quad (6)$$

Prin înlocuirea lui (6) în (4), avem

$$t_1 = \frac{\sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}}{g} \quad (7)$$

adică întârzierea cerută va fi

$$t_0 = t_1 - \frac{v_{02}}{g} \quad (8)$$

sau

$$t_0 = \frac{-v_{02} + \sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}}{g}. \quad (9)$$

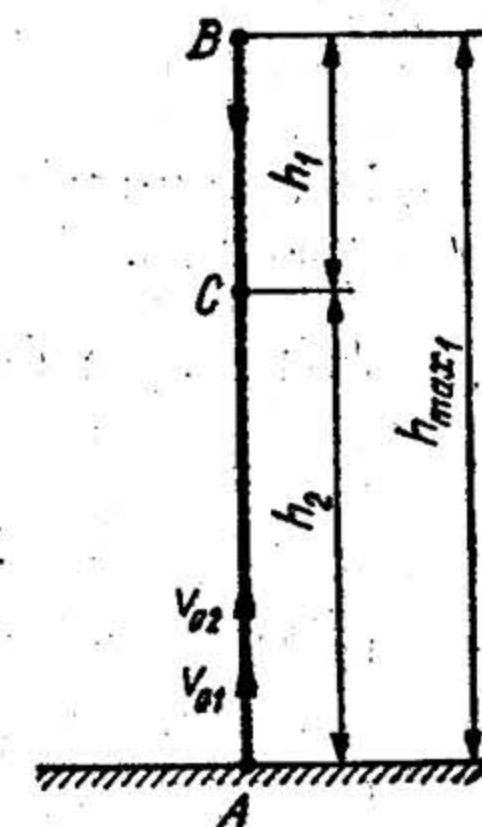


Fig. 2.31

Pentru a afla timpul total de mișcare al primului mobil, adăugăm la t_1 timpul de urcare corespunzător. Avem

$$(t_1)_{total} = \frac{v_{01}}{g} - \frac{v_{02} - \sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}}{g} \quad (10)$$

2.32. Ecuațiile parametrice ale unei aruncări oblice sînt

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{kg} (1 - e^{-kgt})$$

$$y = \frac{1}{kg} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{1}{k} \right) (1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}$$

unde v_0 reprezintă viteza inițială și α unghiul de aruncare, iar k este o constantă. Se cere săgeata traiectoriei și semibătăia acesteia.

Soluție. Se derivează:

$$\frac{dy}{dt} = \left(v_0 \sin \alpha + \frac{1}{k} \right) e^{-kgt} - \frac{1}{k} \quad (1)$$

de unde timpul de extrm are valoarea

$$t' = t \Big|_{v'=0} = -\frac{1}{kg} \ln \frac{1}{kv_0 \sin \alpha + 1} \quad (2)$$

Rezultă

$$y_{max} = y \Big|_{t=t'} = \frac{v_0 \sin \alpha}{kg} - \frac{1}{k^2 g} \ln(1 + kv_0 \sin \alpha). \quad (3)$$

Corespunzător, avem

$$\frac{x_{max}}{2} = x \Big|_{t=t'} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g(1 + kv_0 \sin \alpha)} \quad (4)$$

(Relația (4) este valabilă numai pentru valori foarte mici ale constantei k . În caz contrar traiectoria nu este simetrică în raport cu verticala punctului culminant.)

III. MIȘCAREA CIRCULARĂ UNIFORMĂ

3.1. Se dau două traiectorii concentrice de raze R_1 și R_2 . Pe aceste cercuri pornesc simultan și în același sens, în rotație uniformă, două mobile cu frecvențele ν_1 și ν_2 , din poziția în care ele se află pe același diametru orizontal la distanța cea mai mică. Să se afle momentele de timp după care distanța dintre mobile este maximă, respectiv minimă (fig. 3.1).

Soluție. În condițiile stipulate de problemă, mobilele pot pleca numai din punctele M_1 și M_2 ajungînd după timpul t în pozițiile A și B .

Ele descriu unghiurile $\widehat{AOP} = \alpha_1$ și $\widehat{BOD} = \alpha_2$ ale căror valori sînt

$$\alpha_1 = 2\pi \nu_1 t \quad (1)$$

$$\alpha_2 = 2\pi \nu_2 t. \quad (2)$$

Se observă că

$$\sin \alpha_1 = \frac{AP}{R_1} \quad (3)$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{OP}{R_1} \quad (4)$$

de unde

$$AP = R_1 \sin 2\pi \nu_1 t \quad (5)$$

$$OP = R_1 \cos 2\pi \nu_1 t. \quad (6)$$

Similar avem

$$BD = R_2 \sin 2\pi \nu_2 t \quad (7)$$

$$OD = R_2 \cos 2\pi \nu_2 t. \quad (8)$$

Distanța dintre mobile la momentul t va fi

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(OD - OP)^2 + (BD - AP)^2} \quad (9)$$

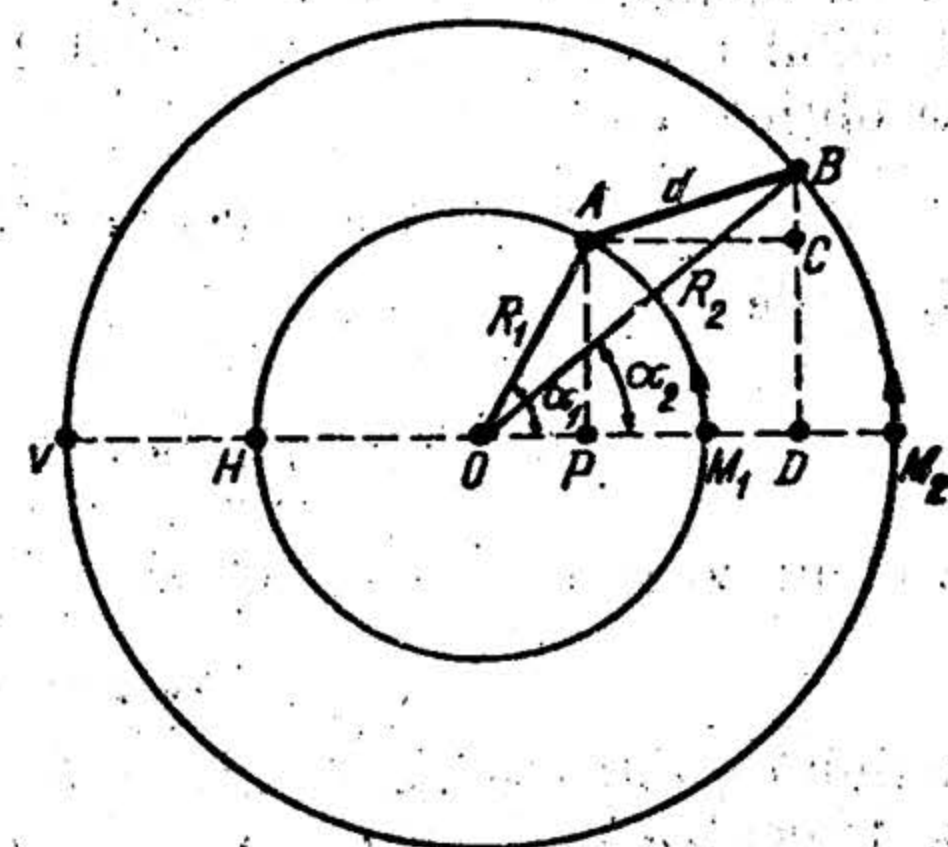


Fig. 3.1.

sau

$$AB = \sqrt{(R_2 \cos 2\pi \nu_2 t - R_1 \cos 2\pi \nu_1 t)^2 + (R_2 \sin 2\pi \nu_2 t - R_1 \sin 2\pi \nu_1 t)^2} \quad (10)$$

sau

$$AB = d = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos 2\pi(\nu_2 - \nu_1)t} \quad (11)$$

Valoarea *maximă* a distanței va fi obținută pentru

$$\cos 2\pi(\nu_2 - \nu_1)t = -1 = \cos(2n+1)\pi \quad (12)$$

de unde

$$t_{\max} = \frac{2n+1}{2(\nu_2 - \nu_1)} \quad (13)$$

pentru $\nu_2 \neq \nu_1$ și $n \in N^*$.

Distanța *maximă* dintre mobile va fi

$$d_{\max} = R_1 + R_2 \quad (14)$$

adică mobilul 1 poate ocupa poziția M_1 , iar mobilul 2 poziția V , sau mobilul 1 va fi în H , iar mobilul 2 în M_2 . Valoarea *minimă* a distanței se obține dacă

$$\cos 2\pi(\nu_2 - \nu_1)t = 1 = \cos 2n\pi \quad (15)$$

de unde

$$t_{\min} = \frac{n}{\nu_2 - \nu_1} \quad (16)$$

pentru: $\nu_2 \neq \nu_1$ și $n \in N^*$ și

$$d_{\min} = R_2 - R_1 \quad (17)$$

definită pentru pozițiile M_1 și H pentru primul mobil, respectiv M_2 și V pentru al doilea.

3.2. Acele unui ceasornic indică ora 12. Să se determine timpul *minim* după care orarul și minutarul sînt: a) perpendiculare; b) în prelungire; c) din nou suprapuse.

Soluție. a) Fie timpul t după care acele fac între ele unghiul $\pi/2$. În acest timp acele s-au rotit cu unghiul α_0 și α_m (avînd perioadele T_0 și T_m respectiv vitezele unghiulare ω_0 și ω_m) astfel că

$$\alpha_m - \alpha_0 = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

sau

$$(\omega_m - \omega_0)t = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

sau

$$\left(\frac{2\pi}{T_m} - \frac{2\pi}{T_0}\right)t = \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

de unde

$$t = \frac{T_0 T_m}{4(T_0 - T_m)} \quad (4)$$

b) În acest caz $\alpha_m - \alpha_0 = \pi$ și avem

$$t = \frac{T_0 T_m}{2(T_0 - T_m)} \quad (5)$$

c) În acest caz $\alpha_m - \alpha_0 = 2\pi$ și avem

$$t = \frac{T_0 T_m}{T_0 - T_m} \quad (6)$$

3.3. Se dă un șanț circular, ca în figură. O bilă se află inițial în punctul O . Să se afle viteza inițială ce trebuie imprimată bilei pentru ca ea să părăsească șanțul în punctul A și să cadă înapoi în punctul B de pe șanț. Se cunosc unghiul α și raza R (fig. 3.3).

Soluție. Pentru ca bila să ajungă din A în B este necesar ca viteza u din punctul A a bilei să satisfacă relația

$$u^2 \cdot \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = AB \quad (1)$$

sau

$$u^2 \cdot \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = 2R \sin \alpha \quad (2)$$

de unde

$$u^2 = Rg \sec \alpha \quad (3)$$

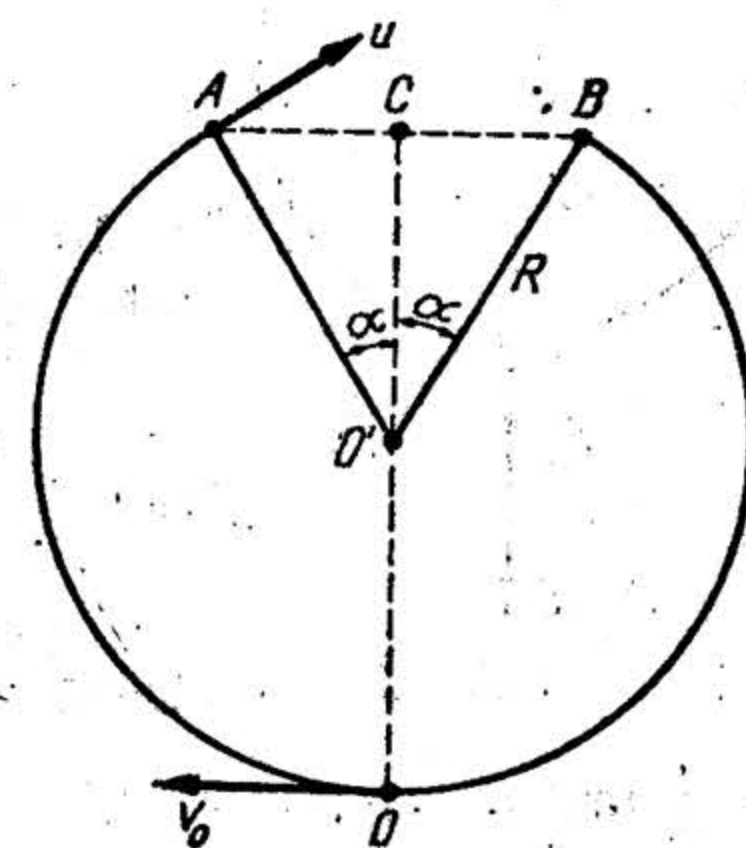


Fig. 3.3.

Conform legii conservării energiei, avem

$$E_{cO} = E_{cA} + E_{pA} \quad (4)$$

sau

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mRg \sec \alpha}{2} + mg(OO' + O'C) \quad (5)$$

sau

$$v_0^2 = u^2 + 2g(R + R \cos \alpha) \quad (6)$$

de unde

$$v_0 = \sqrt{gR(2 + 2 \cos \alpha + \sec \alpha)}. \quad (7)$$

3.4. O găleată cu apă de masă m este rotită într-un plan vertical, centrul de greutate descriind un cerc de rază R . Să se determine:

- Frecvența minimă de rotație necesară păstrării lichidului în vas-
- Între ce limite variază tensiunea din firul de legătură, dacă frecvența de rotație este v (fig. 3.4)?

Soluție. a) Pentru menținerea echilibrului lichidului e necesar ca greutatea acestuia G să echilibreze forța centrifugă de rotație F_{cf} , adică

$$G = F_{cf} \quad (1)$$

sau

$$mg = 4\pi^2 R m v_{min}^2 \quad (2)$$

de unde

$$v_{min} = \sqrt{\frac{g}{4\pi^2 R}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{R}}. \quad (3)$$

b) În punctul culminant al traiectoriei, greutatea și forța centrifugă sînt opuse, deci

$$T_{min} = F_{cf} - G \quad (4)$$

sau

$$T_{min} = m(4\pi^2 R v^2 - g). \quad (5)$$

Dacă $v = v_{min}$ avem $T_{min} = 0$.

În punctul cel mai de jos al traiectoriei avem

$$T_{max} = G + F_{cf} \quad (6)$$

sau

$$T_{max} = m(g + 4\pi^2 R v^2). \quad (7)$$

3.5. O pîlnie de deschidere α (fig. 3.5) este cuplată la o mașină centrifugă. Un corp se află pe pîlnie la distanța r de axa de rotație (coeficientul de frecare este μ). Se cere domeniul de frecvență a rotației necesare echilibrului corpului.

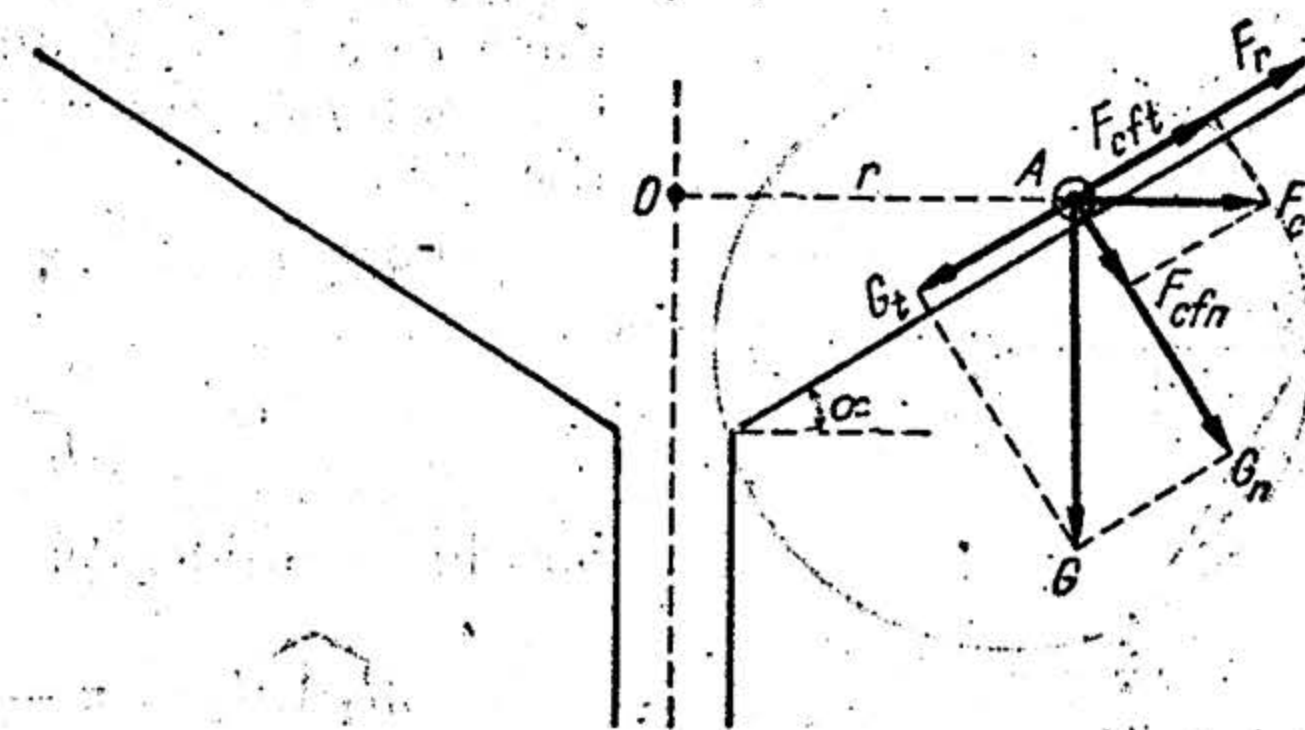


Fig. 3.5.

Soluție. a) Corpul nu urcă din poziția A dacă

$$G_t = F_{cf} + F_r \quad (1)$$

Știind că

$$G_t = mg \sin \alpha \quad (2)$$

$$F_{cf} = 4\pi^2 m r v^2 \cos \alpha \quad (3)$$

$$F_{cfn} = 4\pi^2 m r v^2 \sin \alpha \quad (4)$$

$$F_r = \mu(G_n + F_{cfn}) \quad (5)$$

găsim

$$v_{min} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{r} \cdot \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha}}. \quad (6)$$

b) Corpul nu coboară din poziția A dacă

$$G_t + F_r = F_{cf} \quad (7)$$

Cu aceleași valori ca mai sus, avem

$$v_{max} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{r} \cdot \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}} \quad (8)$$

3.6. Se dau două cercuri tangente exterior în punctul A, de raze R și 2R. Din punctul de tangență pleacă simultan în sens trigonometric pe cele două cercuri, două mobile cu aceeași viteză liniară v.

Să se determine momentele după care distanța dintre mobile este *minimă*, respectiv *maximă* (fig. 3.6).

Soluție. Găsim că

$$\omega = \frac{v}{2R} \quad (1)$$

iar din considerații geometrice.

$$\widehat{M_1 A M_2} = \pi - \frac{\omega t}{2} \quad (2)$$

$$A M_1 = 4R \sin \omega t \quad (3)$$

$$A M_2 = 2R \sin 2\omega t \quad (4)$$

unde t este timpul măsurat de la începutul mișcării.

Avem

$$M_1 M_2 = d = \sqrt{16R^2 \sin^2 \omega t + 4R^2 \sin^2 2\omega t + 16R^2 \sin 2\omega t \sin \omega t \cos \omega t} \quad (5)$$

sau

$$d = 4R \sin \omega t \cdot \sqrt{1 + 3 \cos^2 \omega t} \quad (6)$$

Se derivează această distanță în raport cu timpul și se obține

$$[t]_{d=d_{min}} = k \frac{\pi}{2\omega} = \frac{k\pi R}{v} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

și

$$[t]_{d=d_{max}} = \left(k\pi \pm \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \frac{2R}{v} \quad (8)$$

3.7. Două mobile M_1 și M_2 descriu în același sens (plecând în același moment în mișcare) două cercuri concentrice de raze R_1 și R_2 ($R_2 > R_1$) cu vitezele unghiulare constante ω_1 și ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$). Să se determine viteza mijlocului distanței dintre mobile în momentul în care distanța acestui punct față de centrul cercurilor este minimă (fig. 3.7).

Soluție. La momentul t, coordonatele mijlocului M, vor fi

$$x_M = \frac{x_{M1} + x_{M2}}{2} \quad (1)$$

$$y_M = \frac{y_{M1} + y_{M2}}{2} \quad (2)$$

sau

$$X_M = \frac{R_1 \cos \omega_1 t + R_2 \cos \omega_2 t}{2} \quad (3)$$

$$y_M = \frac{R_1 \sin \omega_1 t + R_2 \sin \omega_2 t}{2} \quad (4)$$

de unde distanța $MO = d$ va fi

$$d = \frac{1}{2} \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1 R_2 \cos (\omega_2 - \omega_1)t} \quad (5)$$

care devine *minimă* pentru

$$[t]_{d=d_{min}} = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1} \quad (6)$$

adică

$$d_{min} = \frac{R_2 - R_1}{2} \quad (7)$$

Pe de altă parte, proiecțiile vitezei lui M pe cele două axe sînt

$$v_{Mx} = \frac{dx_M}{dt} = -\frac{R_1 \omega_1 \sin \omega_1 t + R_2 \omega_2 \sin \omega_2 t}{2} \quad (8)$$

$$v_{My} = \frac{dy_M}{dt} = \frac{R_1 \omega_1 \cos \omega_1 t + R_2 \omega_2 \cos \omega_2 t}{2} \quad (9)$$

Avem

$$v_M = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{R_1^2 \omega_1^2 + R_2^2 \omega_2^2 + 2R_1 R_2 \omega_1 \omega_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t} \quad (10)$$

$$v_{Mmin} = [v_M]_{t=\pi/(\omega_2 - \omega_1)} = \frac{R_2 \omega_2 - R_1 \omega_1}{2} \quad (11)$$

3.8. a) Cu ce viteză *maximă* poate merge un motociclist pe o pistă circulară orizontală cu raza R dacă coeficientul de frecare este μ ?

b) Se cere aceeași valoare a vitezei, în aceleași condiții, dacă planul pistei face un unghi α cu orizontala.

c) Ce valoare trebuie să aibă înclinarea pistei pentru a obține în cazul punctului b) o viteză *cît mai mare*?

Soluție. a) Forța centrifugă egalează forța de frecare, adică

$$\frac{mv_{max}^2}{R} = \mu mg \quad (1)$$

de unde

$$v_{max} = \sqrt{\mu g R} \quad (2)$$

b) Pentru realizarea unui echilibru dinamic este necesar ca

$$\frac{mv_{1max}^2}{R} \cos \alpha = \mu \left(mg \cos \alpha + \frac{mv_{1max}^2}{R} \sin \alpha \right) + mg \cos \alpha \quad (3)$$

de unde

$$v_{1max} = \sqrt{gR \frac{\mu + \tan \alpha}{1 - \mu \tan \alpha}} \quad (4)$$

c) Se observă că dacă: $1 - \mu \tan \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow v_{1max} \rightarrow \infty$ deci

$$[\alpha]_{v_{1max} \rightarrow \infty} = \arctg \frac{1}{\mu} \quad (5)$$

3.9. Pe un ecran este proiectată imaginea unei diligențe în mișcare. Roțile din față cu raza R_1 , iar cele din spate cu raza $R_2 > R_1$. O roată din față are un număr N_1 de spițe, iar viteza de redare este de N imagini pe secundă.

Roțile se rostogolesc fără să alunece.

a) Ce viteză *minimă* trebuie să aibă diligența pentru ca roțile din față să apară *fixe* pe ecran?

b) Ce număr *minim* de spițe trebuie să aibă roțile din spate pentru ca și ele să apară *fixe* pe ecran?

c) În ipoteza că ambele roți au același număr de spițe ($N_1 = N_2$) și că diligența se mișcă de la stînga la dreapta, să se determine *domeniul de viteze* ale diligenței pentru care unui spectator i se pare că roțile se mișcă *în sens trigonometric*?

d) Aceeași întrebare, pentru cazul cînd spectatorului i se pare că roțile din față și din spate se rotesc în *sensuri contrare* (fig. 3.9).

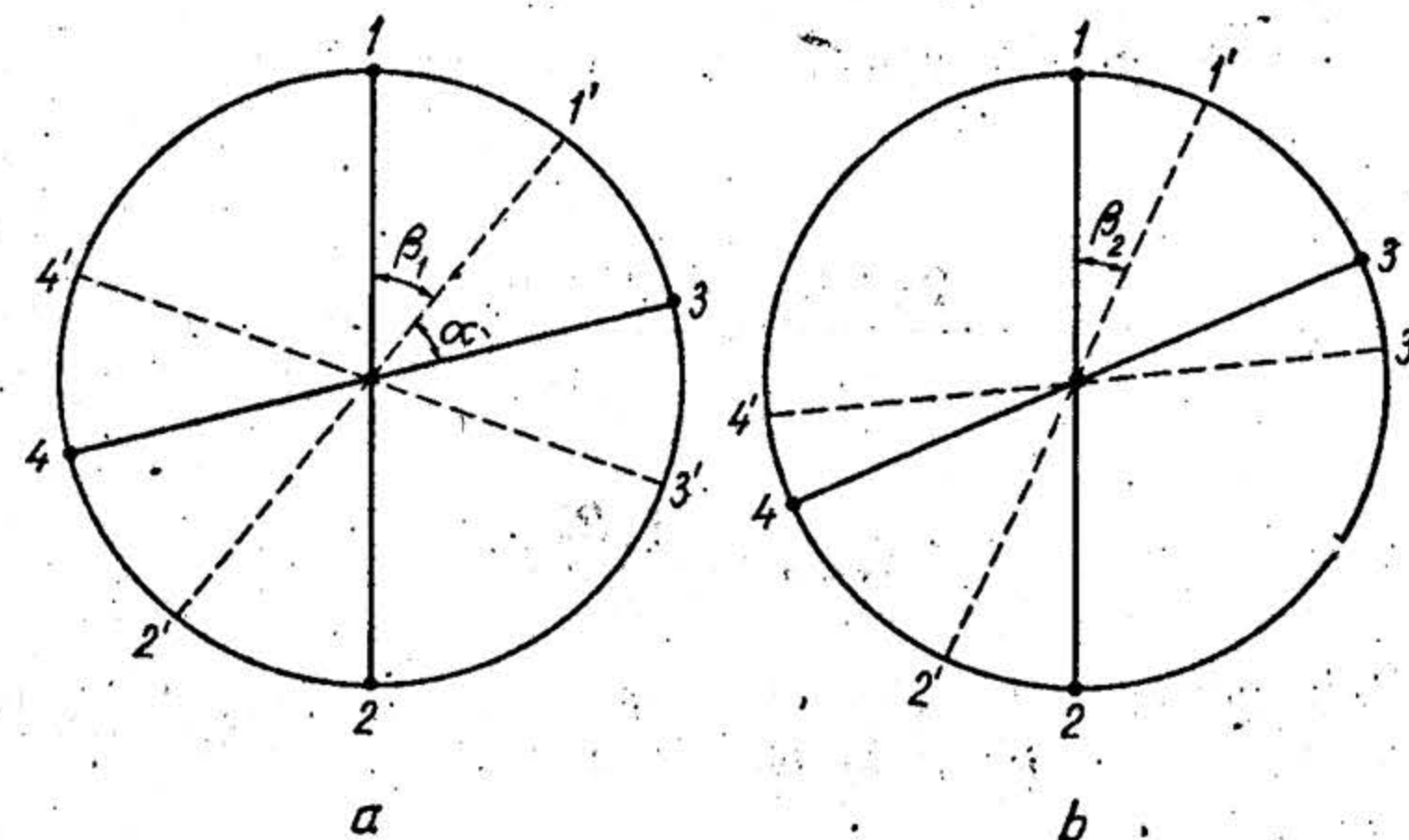


Fig. 3.9.

Soluție. a) Observăm că unghiul dintre două spițe vecine ale roții din față este

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{N_1} \quad (1)$$

iar timpul dintre două imagini succesive este

$$t' = \frac{1}{N} \quad (2)$$

În acest timp, roata din față se rotește cu un unghi

$$\alpha = k\alpha_1 = \omega t' \quad (3)$$

unde $k = 1, 2, \dots, n$ și ω este viteza unghiulară de rotație. Dacă

$$\omega = \frac{2\pi k}{N_1 t'} = \frac{2\pi k N}{N_1} \quad (4)$$

roata din față apare fixă pe ecran. Deci, viteza liniară va fi

$$v_1 = \omega R_1 = \frac{2\pi k N R_1}{N_1} \quad (5)$$

Viteza liniară minimă, va fi

$$v_{min1} = v|_{k=1} = \frac{2\pi N R_1}{N_1} \quad (6)$$

b) Roțile din spate vor apare fixe pe ecran dacă

$$v_{min1} = v_{min2} \quad (7)$$

sau

$$\frac{2\pi N R_1}{N_1} = \frac{2\pi N R_2}{N_2} \quad (8)$$

de unde

$$N_{2min} = \frac{N_1 R_2}{R_1} \quad (9)$$

c) Spițele par a se roti în sens trigonometric dacă după timpul t' roata se rotește cu unghiul β_1 astfel ca

$$k\alpha_1 > \beta_1 > k\alpha_1 - \frac{\alpha_1}{2} \quad (10)$$

Deci, viteza unghiulară necesară ca spectatorul să aibă impresia unei rotiri în sens trigonometric de unghi $\alpha < \alpha_1/2$ este cuprinsă în intervalul

$$k\alpha_1 N > \omega_1 > \frac{2k-1}{2} \alpha_1 N. \quad (11)$$

Viteza liniară va îndeplini condițiile

$$\begin{aligned} k\alpha_1 R_1 N > v > k\alpha_1 R_1 N - \frac{\alpha_1}{2} R_1 N \\ k\alpha_1 R_2 N > v > k\alpha_1 R_2 N - \frac{\alpha_1}{2} R_2 N. \end{aligned} \quad (12)$$

Se poate arăta că inegalitățile (12) sînt simultane doar pentru $k = 1$.

d) Spițele roții din spate par a se roti în sensul acelor dacă, după timpul t' , roata s-a rotit cu unghiul β_2 astfel ca

$$(2k-1) \frac{\alpha_1}{2} > \beta_2 > (k-1) \alpha_1. \quad (13)$$

În această situație, viteza liniară va trebui să satisfacă dubla inegalitate

$$\frac{2k-1}{2} \cdot \alpha_1 R_2 N > v > (k-1) \alpha_1 R_2 N. \quad (14)$$

3.10. Un looping are raza R . Se cere:

a) Înălțimea minimă de la care trebuie să plece biciclistul pentru a fi în siguranță în punctul culminant al buclei (fig. 3.10).

b) Ajuns în punctul A, fixat ca în figură, biciclistul lansează un obiect sub același unghi α . Să se discute, în funcție de valoarea acestui unghi, traiectoriile posibile ale obiectului.

Soluție. a) În punctul cel mai înalt, avem

$$G = F_{cf} \quad (1)$$

sau

$$mg = \frac{mv^2}{R} \quad (2)$$

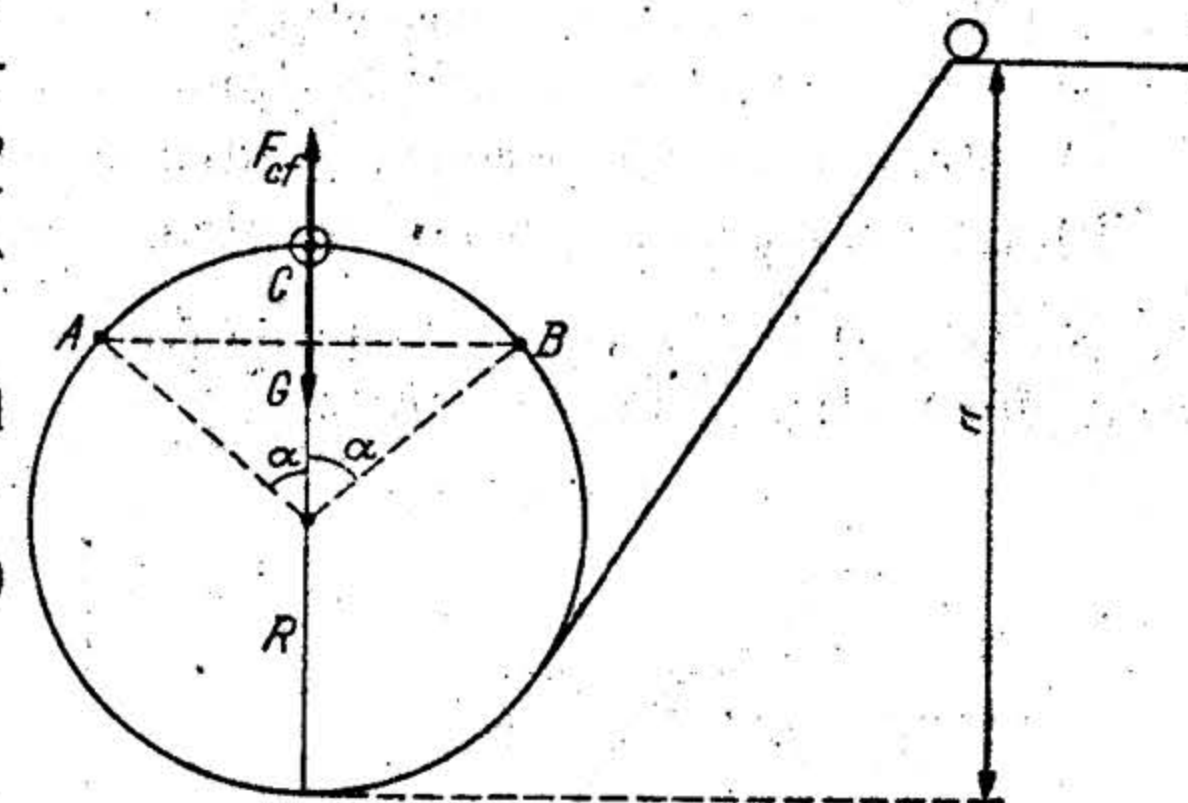


Fig. 3.10.

ar conform legii conservării energiei

$$mgh = 2Rmg + \frac{mv^2}{2} \quad (3)$$

de unde

$$h_{min} = 2,5R. \quad (4)$$

b) Viteza de lansare, în punctul A, se deduce tot din legea conservării energiei

$$2,5 mgR = \frac{mv_A^2}{2} + mgR(1 + \cos \alpha). \quad (5)$$

Din aruncarea oblică, avem

$$AB = \frac{v_A^2 \sin 2\alpha}{g} = 2R \sin \alpha \quad (6)$$

de unde

$$v_A^2 = \frac{Rg}{\cos \alpha}$$

care, introdusă în (5), ne dă:

- când $\alpha' < \alpha$, corpul zboară în afara loopingului,
- când $\alpha' = \alpha$, corpul ajunge în punctul B,
- când $\alpha' > \alpha$ corpul cade în interiorul loopingului.

3.11. Un autocamion parcurge o porțiune curbă cu raza R . Coeficientul de frecare este μ (între roți și șosea). Distanța dintre roți este d_1 , iar centrul de greutate se află la d_2 metri de sol. Se cer:

- a) viteza maximă permisă pentru a evita alunecarea;
- b) viteza maximă permisă pentru a evita răsturnarea.

Soluție. a) E necesar ca forța de frecare să fie cel puțin egală cu cea centrifugă (fig. 3.11, a), adică

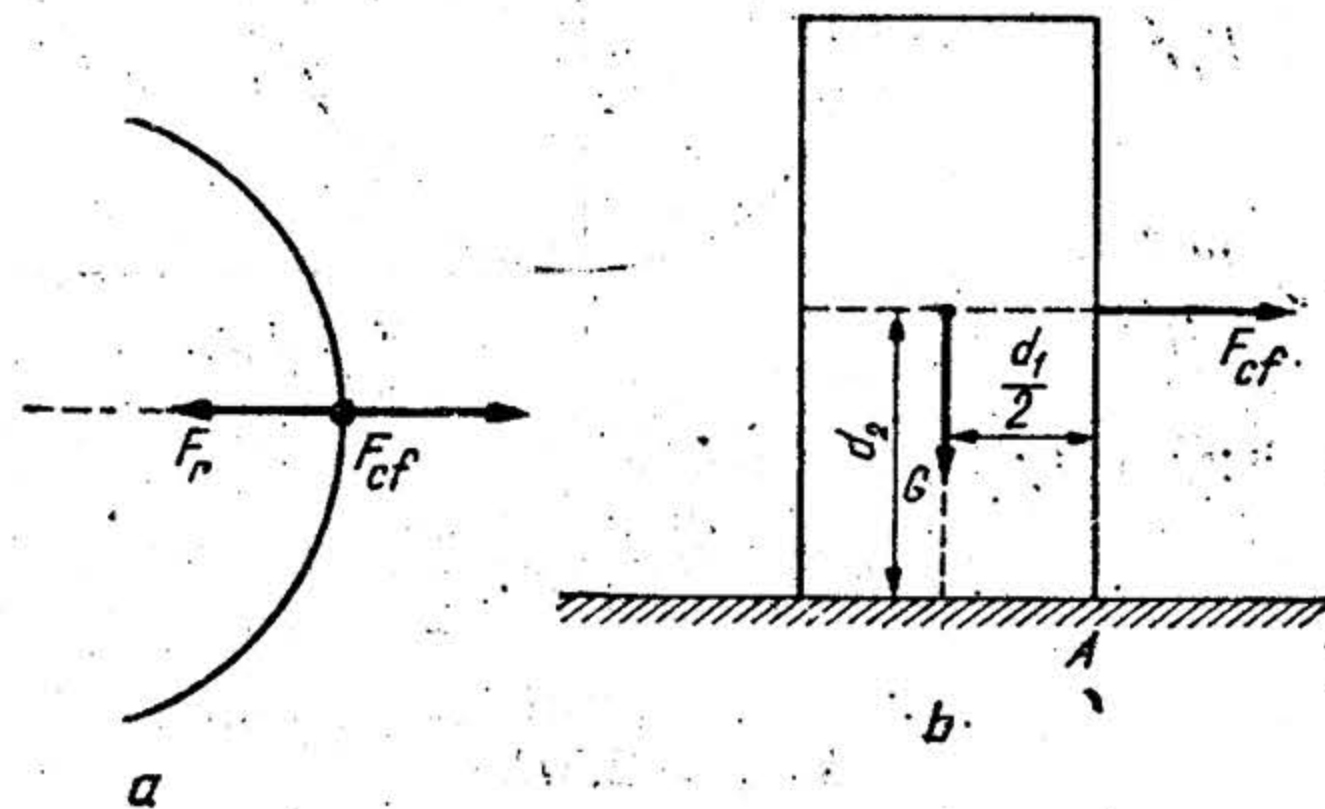


Fig. 3.11.

$$\mu mg = \frac{mv_{max}^2}{R} \quad (1)$$

de unde

$$v_{max} = \sqrt{R\mu g}. \quad (2)$$

b) Vehiculul se răstoarnă în momentul în care momentul polar al forței centrifuge în raport cu punctul A îl depășește pe cel corespunzător greutății (fig. 3.11, b). Avem, la echilibru

$$F_{cf} \cdot d_2 = mg \cdot \frac{d_1}{2} \quad (3)$$

sau

$$\frac{mv_{max}^2}{R} \cdot d_2 = mg \cdot \frac{d_1}{2} \quad (4)$$

de unde

$$v_{max} = \sqrt{\frac{Rgd_1}{2d_2}}. \quad (5)$$

3.12. Un cilindru rotitor de rază R , gol în interior, are așezat pe capacul superior un corp de masă m_1 la distanța d de centru, iar pe pereții curb un alt corp de masă m_2 . Coeficientul de frecare, pentru ambele corpuri, este μ . Știind că al doilea corp este în repaus față de cilindru (fig. 3.12), să se discute starea mecanică a primului corp.

Soluție. Al doilea corp este în repaus dacă

$$G_2 = F_{r2} \quad (1)$$

sau

$$m_2 g = \mu F_{cf2} = 4\pi^2 R m_2 / \mu v^2 \quad (2)$$

de unde frecvența minimă de rotație a ambelor corpuri este

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{R\mu}}. \quad (3)$$

Asupra primului corp acționează forțele F_{r1} și F_{cf1} , de valori

$$F_{r1} = \mu m_1 g \quad (4)$$

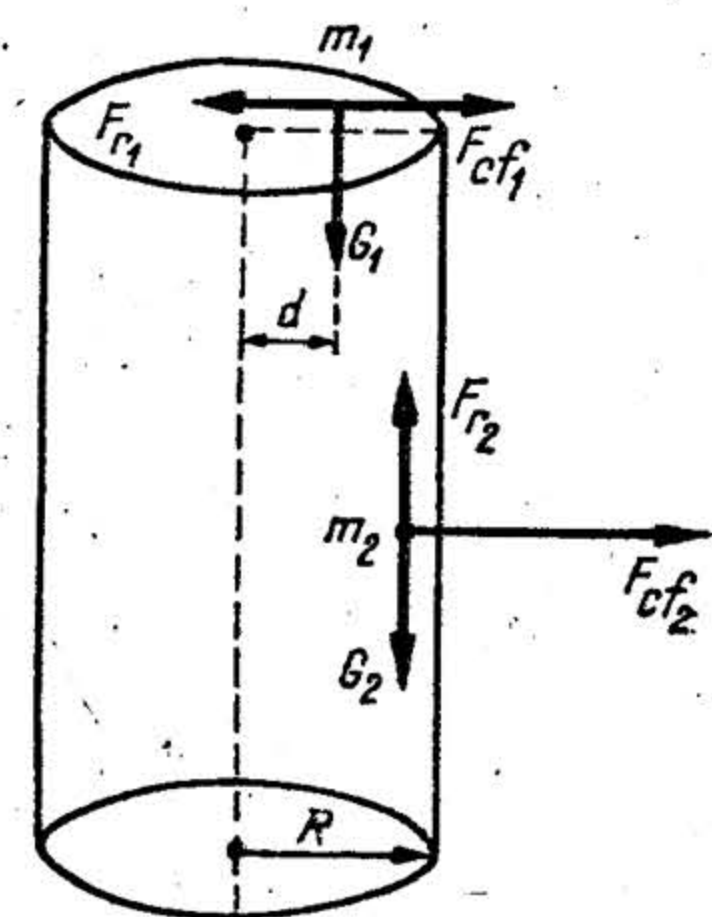


Fig. 3.12.

$$F_{cf1} = 4\pi^2 dm_1 \frac{g}{4\pi^2 R \mu} = \frac{dm_1 g}{R \mu} \quad (4)$$

Rezultanta lor va fi

$$F = F_{r1} - F_{cf1} = \frac{m_1 g}{R \mu} (\mu^2 R - d). \quad (5)$$

Dacă

$$\mu = \sqrt{\frac{d}{R}}$$

corpul rămâne în echilibru.

Dacă

$$\mu < \sqrt{\frac{d}{R}}$$

corpul va fi tras spre exterior.

IV. MIȘCAREA OSCILATORIE

4.1. Studiind o mișcare oscilatorie fără fază inițială se constată că pentru elongațiile y_1 și y_2 măsurate la momentele t_1 și t_2 corespund vitezele v_1 și v_2 ale mișcării. Să se deducă ecuația mișcării studiate.

Soluție. La cele două momente de timp, elongațiile sint

$$y_1 = A \sin \omega t_1 \quad (1)$$

$$y_2 = A \sin \omega t_2 \quad (2)$$

iar vitezele

$$v_1 = A \omega \cos \omega t_1 \quad (3)$$

$$v_2 = A \omega \cos \omega t_2. \quad (4)$$

Cele patru ecuații se ridică la pătrat și avem

$$y_1^2 + \frac{v_1^2}{\omega^2} = A^2 \quad (5)$$

$$y_2^2 + \frac{v_2^2}{\omega^2} = A^2 \quad (6)$$

de unde

$$\omega = \sqrt{\frac{v_2^2 - v_1^2}{y_1^2 - y_2^2}} \quad (7)$$

$$A = \sqrt{\frac{y_1^2 v_2^2 - y_2^2 v_1^2}{v_2^2 - v_1^2}}. \quad (8)$$

Deci, oscilația studiată are ecuația

$$y = \sqrt{\frac{y_1^2 v_2^2 - y_2^2 v_1^2}{v_2^2 - v_1^2}} \sin \sqrt{\frac{v_2^2 - v_1^2}{y_1^2 - y_2^2}} t. \quad (9)$$

4.2. Un pendul gravitațional oscilează în vid, la 0°C . Dacă perioada lui $T_0 = 2\pi\sqrt{l_0/g_0}$ este de o secundă, pendulul arată ora exactă. Ce se întâmplă cu perioada pendulului dacă:

- oscilează într-un mediu cu densitatea ρ_1 , el fiind alcătuit dintr-un mediu cu densitatea ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$);
- oscilează într-un mediu cu temperatura $t^\circ\text{C}$ (tija pendulului are coeficientul de dilatare liniară α);
- pendulul este ridicat, respectiv coborât cu accelerația a ;
- este deplasat orizontal cu accelerația a ;
- este ridicat, respectiv coborât față de nivelul mării cu distanța h . Care este avansul, respectiv întârzierea, față de timpul exact, în fiecare din aceste cazuri, pe intervalul temporal $[\Delta t]$?

Soluție. a) Conform legii lui Arhimede, accelerația pendulului are expresia

$$a = g_0 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \quad (1)$$

deci

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g_0 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)}} = T_0 \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}} \quad (2)$$

- b) Conform legii dilatării liniare, lungimea tije pendulului la $t^\circ\text{C}$ va fi

$$l = l_0 (1 + \alpha t^\circ) \quad (3)$$

deci noua perioadă are valoarea

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0(1 + \alpha t^\circ)}{g_0}} = T_0 \sqrt{1 + \alpha t^\circ} \quad (4)$$

- c) La urcarea pendulului, accelerația rezultantă este

$$a_u = g_0 + a \quad (5)$$

iar la coborire

$$a_c = g_0 - a \quad (6)$$

Deci perioadele corespunzătoare vor fi

$$T_u = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g_0 + a}} \quad (7)$$

$$T_c = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g_0 - a}} \quad (8)$$

- d) Prin compunerea accelerației orizontale cu accelerația căderii libere obținem accelerația rezultantă

$$a' = \sqrt{g_0^2 + a^2} \quad (9)$$

deci noua perioadă este

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{\sqrt{g_0^2 + a^2}}} \quad (10)$$

- g) La altitudinea h , accelerația gravitațională are valoarea

$$g = \frac{g_0 R^2}{(R \pm h)^2} \quad (11)$$

deci perioada pendulului va fi

$$T = T_0 \frac{R \pm h}{R} \quad (12)$$

unde R este raza terestră. Se poate arăta că la adâncimea h accelerația gravitațională este

$$g = g_0 \frac{R - h}{R} \quad (13)$$

deci perioada pendulului va fi

$$T = T_0 \sqrt{\frac{R}{R - h}} \quad (14)$$

Într-un timp $[\Delta t]$, la mersul exact, un pendul va face N_0 oscilații, fiecare de valoare T_0 secunde. Dacă ceasornicul nu merge exact (adică între perioade va exista o diferență $T - T_0$), atunci în intervalul amintit ceasornicul va înainta sau va rămâne în urmă cu timpul Δt dat de relația

$$\Delta t = N(T - T_0) = \frac{[\Delta t]}{T} (T - T_0) \quad (15)$$

Dacă $T > T_0$ respectiv $\Delta t > 0$ ceasornicul va rămâne în urmă față de ora exactă.

Dacă $T < T_0$ respectiv $\Delta t < 0$ ceasornicul va înainta față de ora exactă.

4.3. Un mobil oscilează conform ecuației $y = k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t$.
Se cere:

a) Să se arate că această oscilație este *armonică* și să se determine amplitudinea și faza inițială a mișcării.

b) Să se calculeze momentele de timp după care $y/A = m/n$ ($m \leq n$).

c) Valoarea *maximă* a vitezei de oscilație și momentele de timp după care se repetă această valoare.

d) Idem pentru accelerația mișcării.

e) Momentele de timp după care energia cinetică este *egală* cu energia potențială a mișcării.

Soluție. a) Ecuația elongației trebuie să fie de forma

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin \omega t \cos \varphi + A \cos \omega t \sin \varphi. \quad (1)$$

Comparând cu ecuația dată a mișcării avem

$$\begin{aligned} A \cos \varphi &= k_1 \\ A \sin \varphi &= k_2 \end{aligned} \quad (2)$$

de unde

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \\ \varphi &= \arctg \frac{k_2}{k_1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Deci ecuația oscilației se mai scrie

$$y = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \left(\sin \omega t + \arctg \frac{k_2}{k_1} \right). \quad (5)$$

Ecuația $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ se derivează de două ori în raport cu timpul, obținându-se viteza, respectiv accelerația mișcării

$$v = \frac{dy}{dt} = A \omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi). \quad (7)$$

Observându-se că

$$a = -\omega^2 y \quad (8)$$

rezultă că oscilația dată este armonică.

b) Notînd

$$\beta = \arcsin \frac{y}{A} = \arcsin \frac{m}{n} \quad (9)$$

avem

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin \beta \quad (10)$$

de unde

$$t = \frac{\beta - \varphi + 2k\pi}{\omega} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

c) Viteza oscilației este maximă dacă

$$\cos(\omega t + \varphi) = 1 = \cos 2k\pi \quad (12)$$

și se repetă după timpii

$$t = \frac{2k\pi - \varphi}{\omega}. \quad (13)$$

Maximul vitezei are valoarea

$$v_{max} = A \omega = \omega \sqrt{k_1^2 + k_2^2}. \quad (14)$$

d) Accelerația mișcării este minimă dacă

$$\sin(\omega t + \varphi) = 1 = \sin \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

și se repetă la intervalele

$$t = \frac{(4k + 1)\pi - 2\varphi}{2\omega}. \quad (16)$$

Modulul maximului accelerației este

$$|a_{max}| = A \omega^2 = \omega^2 \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad (17)$$

e) Din text rezultă că

$$E_c = E_p = \frac{m}{2} \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (18)$$

sau

$$\sin^2(\omega t + \varphi) = \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (19)$$

care ne dă timpul cerut

$$t = \frac{(2k + 1)\pi - 4\varphi}{4\omega}. \quad (20)$$

4.4. Se dau două pendule gravitaționale, de lungimi egale, suspendate în același punct și cu masele m_1 și m_2 ($m_2/m_1 = k$). Primul pendul este scos din poziția de echilibru la unghiul α și apoi lăsat liber. Să se afle unghiul *maxim* dintre pendule după ciocnirea lor perfect elastică. Discuție în funcție de k (fig. 4.4).

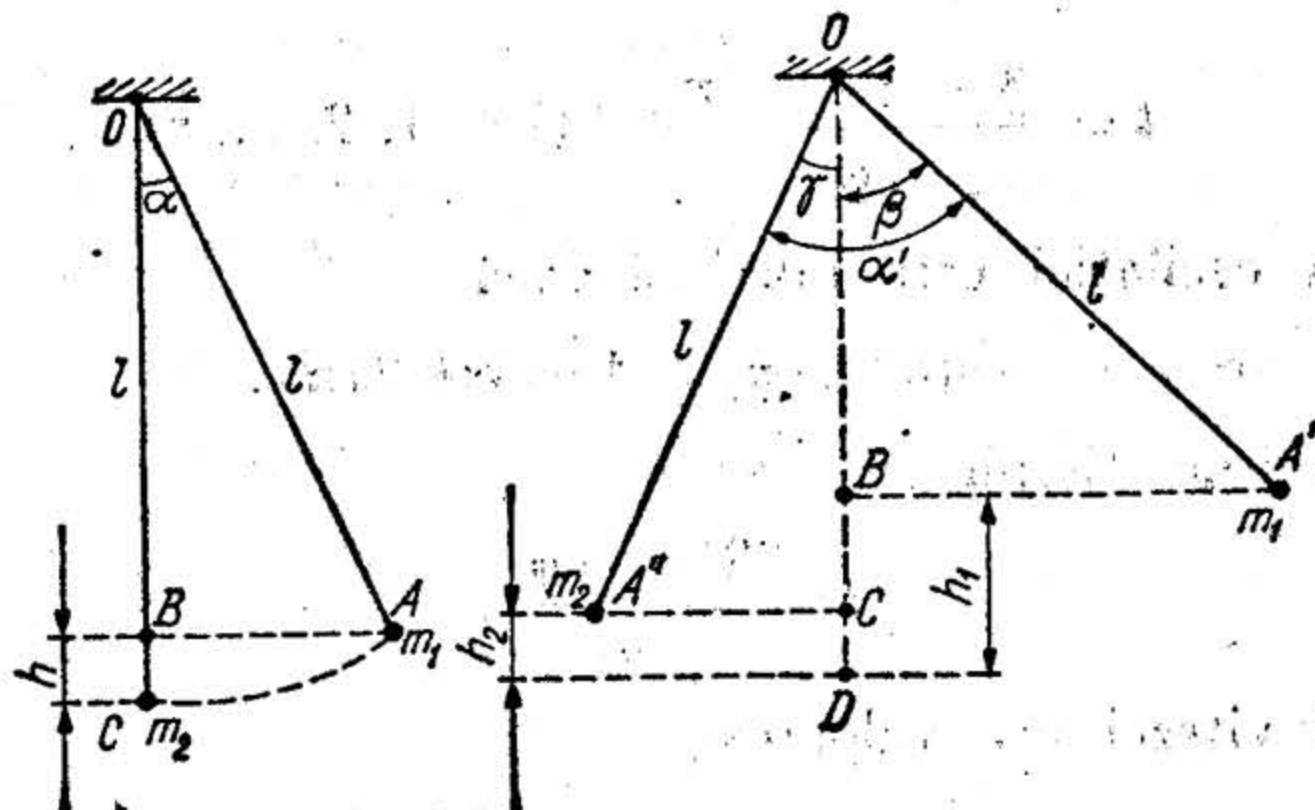


Fig. 4.4

Soluție. Fie l lungimea unuia din pendule. Primul pendul este scos din poziția de echilibru pînă la înălțimea

$$h = l(1 - \cos \alpha) \quad (1)$$

față de poziția inițială. Legea conservării energiei, aplicată în punctele A și C, arată că

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = m_1 g h = m_1 g l (1 - \cos \alpha) \quad (2)$$

de unde rezultă viteza cu care este ciocnit al doilea pendul (în repaus)

$$v_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} \quad (3)$$

Fie u_1 și u_2 vitezele celor două pendule după ciocnirea elastică. Conservarea impulsului și energiei cinetice (al doilea pendul este inițial în repaus) ne dă

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 \quad (4)$$

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 \quad (5)$$

Rezolvînd sistemul obținut (reținînd și raportul maselor) avem:

$$u_1 = \frac{1 - k}{1 + k} v_1 \quad (6)$$

$$u_2 = \frac{2v_1}{1 + k} \quad (7)$$

După ciocnire, pendulele se ridică pînă la înălțimile h_1 și h_2 față de orizontală, sub unghiurile maxime β și γ , pînă la punctele A' și A''. Utilizînd conservarea energiei mecanice în punctele D și A' și D și A'', avem

$$h_1 = \left(\frac{1 - k}{1 + k} \right)^2 l (1 - \cos \alpha) \quad (8)$$

$$h_2 = \frac{4l(1 - \cos \alpha)}{(1 + k)^2} \quad (9)$$

Din $\triangle BOA'$ și $\triangle COA''$, avem

$$\beta = \arccos \left[1 - \left(\frac{1 - k}{1 + k} \right)^2 (1 - \cos \alpha) \right] \quad (10)$$

$$\gamma = \arccos \left[1 - \frac{4(1 - \cos \alpha)}{(1 + k)^2} \right] \quad (11)$$

adică

$$\alpha' = \beta + \gamma \quad (12)$$

Se observă că:

a) dacă $k \rightarrow \infty$ (adică $m_1 \rightarrow 0$ sau $m_2 \rightarrow \infty$), avem $\beta = \alpha$; $\gamma = 0$, adică al doilea pendul nu deviază, iar primul revine în fosta poziție inițială, de unde a pornit să-l ciocnească pe al doilea;

b) dacă $k = 1$ (adică $m_1 = m_2$), avem $\beta = 0$ și $\gamma = \alpha$, adică cele două pendule își schimbă rolurile.

4.5. Un pendul cu masa m și lungimea l este scos din poziția de echilibru pînă la amplitudinea unghiulară α_1 . Se cere:

a) energia mecanică a oscilatorului;

b) energia cinetică și potențială ale pendulului pentru unghiul de oscilație $\alpha_2 (\alpha_2 < \alpha_1)$;

c) firul pendulului rezistă pînă la forța R . Să se calculeze dacă firul se rupe sau nu la unghiul α_2 (fig. 4.5).

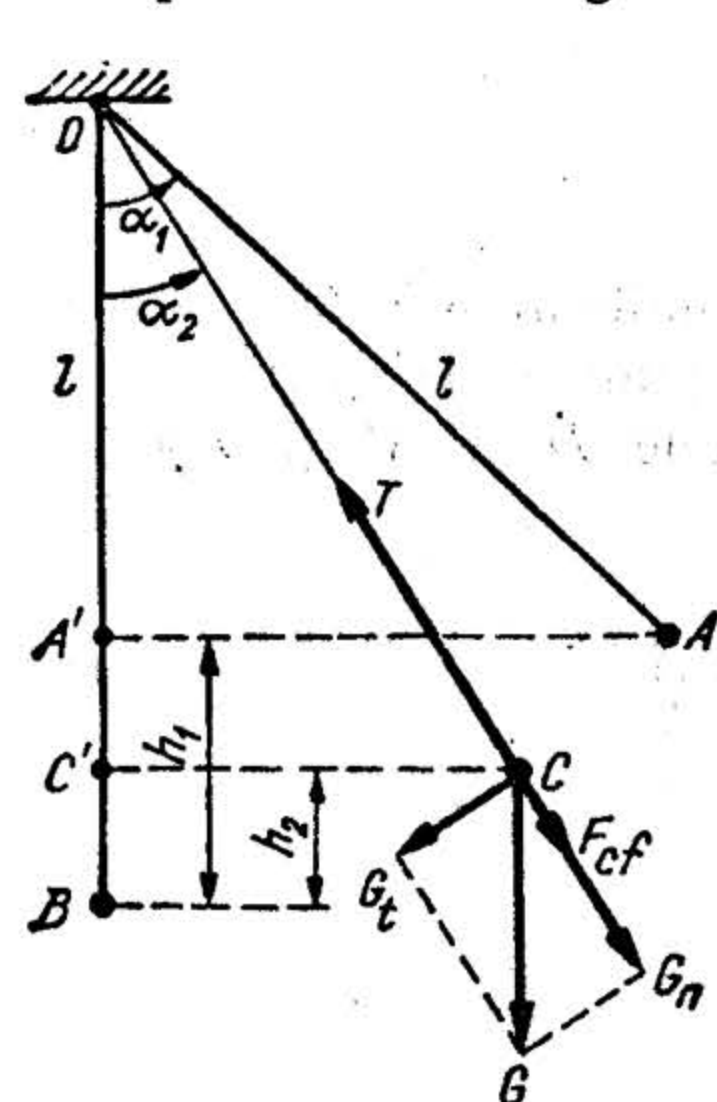


Fig. 4.5

Soluție. a) Pendulul se oprește în punctul A, deci $v_A = 0$ și ca atare în această poziție energia potențială reprezintă energia mecanică a acestuia. Observînd că

$$h_1 = OB - OA' = l(1 - \cos \alpha_1) \quad (1)$$

avem

$$E = E_{pA} = mgh_1 = mgl(1 - \cos \alpha_1). \quad (2)$$

b) În poziția C pendulul are ambele forme de energie mecanică. Cea potențială este

$$E_{rc} = mgh_2 = mgl(1 - \cos \alpha_2) \quad (3)$$

iar cea cinetică

$$E_{ec} = E - E_{rc} = mgl(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (4)$$

c) Tensiunea din fir are valoarea

$$T = F_{cf} + G_n \quad (5)$$

observînd că

$$G_n = G \cos \alpha_2 = mg \cos \alpha_2 \quad (6)$$

$$F_{cf} = \frac{m}{l} \cdot v_c^2 = \frac{m}{l} \cdot 2gA'C' = \frac{2mg}{l} (h_1 - h_2) \quad (7)$$

avem

$$T = mg(3 \cos \alpha_2 - 2 \cos \alpha_1). \quad (8)$$

Dacă $R \geq T$ firul rezistă. În caz contrar, se rupe.

4.6. Să se alcătuiască un tabel comparativ al fazelor de oscilație pentru oscilatorii: pendulul gravitațional, pendulul elastic și circuitul oscilant închis.

Soluție.

Timpul	FIGURA			Energia	
	Pendulul gravitațional	Pendulul elastic	Circuitul oscilant închis	cinetică	potențială
$t = 0$				0	Max.
$t = \frac{T}{8}$				$\frac{1}{2}$ Max.	$\frac{1}{2}$ Max.
$t = \frac{T}{4}$				Max.	0
$t = \frac{3T}{8}$				$+\frac{1}{2}$ Max.	$-\frac{1}{2}$ Max.
$t = \frac{T}{2}$				0	- Max.
$t = \frac{5T}{8}$				$-\frac{1}{2}$ Max.	$-\frac{1}{2}$ Max.
$t = \frac{3T}{4}$				- Max.	0
$t = \frac{7T}{8}$				$-\frac{1}{2}$ Max.	$+\frac{1}{2}$ Max.
$t = T$				0	Max.

4.7. Se dau două resorturi de elasticități diferite, care se cuplează inițial în serie, apoi în paralel (sistemul oscilează pe verticală, fiind fixat în partea inferioară). În partea superioară sistemul are o emisferă goală, de masă m_2 , în care poate să cadă de la înălțimea h un corp de masă m_1 . Să se determine, în ipoteza ciocnirii plastice a celor două corpuri:

a) Viteza maximă de oscilație a sistemului format în urma celor două cuplări.

b) Constantele elastice ale resorturilor și amplitudinile oscilațiilor.

c) Ecuațiile de mișcare ale sistemului format prin cele două cuplări.

d) Raportul dintre energiile cinetică și potențială pentru cazul când raportul dintre elongație și amplitudine este $k(k < 1)$, pentru cuplarea în serie.

e) Timpul în care raportul dintre elongație și amplitudine crește de la r_1 la r_2 ($r_2 < 1$) pentru gruparea în paralel (fig. 4.7).

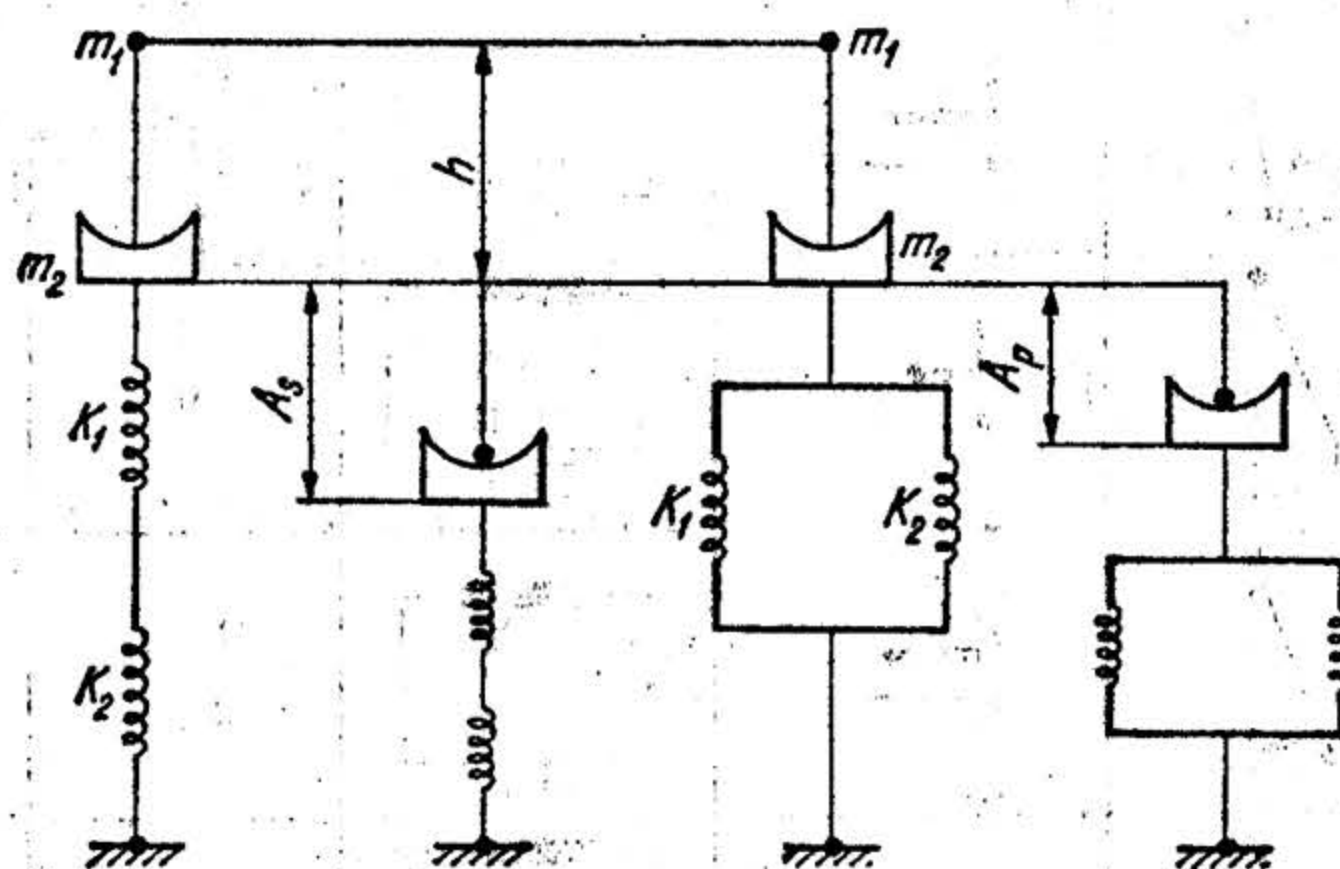


Fig. 4.7

Soluție. a) Viteza cu care corpul cade liber este

$$v_0 = \sqrt{2gh}. \quad (1)$$

Conform conservării impulsului într-o ciocnire plastică (emisfera era inițial în repaus) avem că viteza sistemului imediat după ciocnire are valoarea

$$v = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh}. \quad (2)$$

b) Pulsațiile oscilațiilor în cele două cuplări vor fi

$$\omega_{\text{serie}} = \omega_s = \frac{v_{\text{max}}}{A_s} = \sqrt{\frac{k_s}{m_1 + m_2}} \quad (3)$$

și

$$\omega_{\text{paralel}} = \omega_p = \frac{v_{\text{max}}}{A_p} = \sqrt{\frac{k_p}{m_1 + m_2}} \quad (4)$$

unde k_s și k_p sînt constantele elastice echivalente legărilor în serie, respectiv paralel, iar A_s și A_p sînt amplitudinile corespunzătoare celor două legări. Legea conservării energiei mecanice pentru cele două cuplări se scrie

$$\frac{m_1 + m_2}{2} v^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2 g^2}{k_s} = \frac{1}{2} k_s A_s^2 \quad (5)$$

$$\frac{m_1 + m_2}{2} v^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2 g^2}{k_p} = \frac{1}{2} k_p A_p^2. \quad (6)$$

Din aceste relații putem determina pe A_s , A_p , k_s , k_p , ω_s , ω_p . Fie k_1 și k_2 constantele elastice ale celor două resorturi. Ele se determină din relațiile

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (7)$$

$$k_p = k_1 + k_2. \quad (8)$$

c) Cunoscînd amplitudinile și pulsațiile mișcărilor, ecuațiile oscilației sistemului în cele două cazuri vor fi

$$y_s = A_s \sin \omega_s t \quad (9)$$

$$y_p = A_p \sin \omega_p t. \quad (10)$$

d) Raportul cerut va fi

$$\left(\frac{E_c}{E_p} \right)_{s1} = \cotg^2 \omega_s t = \frac{1 - \sin^2 \omega_s t}{\sin^2 \omega_s t}. \quad (11)$$

Pe de altă parte avem

$$\left(\frac{y}{A} \right)_s = k = \sin \omega_s t \quad (12)$$

de unde

$$\left(\frac{E_c}{E_p}\right)_s = \frac{1 - k^2}{k^2}. \quad (13)$$

e) Avem:

$$\left(\frac{y_1}{A}\right)_p = r_1 = \sin \omega_p t_1 \quad (14)$$

$$\left(\frac{y_2}{A}\right)_p = r_2 = \sin \omega_p t_2 \quad (15)$$

de unde

$$t_1 = \frac{1}{\omega_p} \arcsin r_1 \quad (16)$$

$$t_2 = \frac{1}{\omega_p} \arcsin r_2 \quad (17)$$

deci

$$t = t_2 - t_1 = \frac{1}{\omega_p} (\arcsin r_2 - \arcsin r_1). \quad (18)$$

4.8. Se dau două oscilații coerente de direcții paralele, de amplitudini A_1 și A_2 . Amplitudinea rezultantă este A . Viteza maximă a unui mobil aparținând primei oscilații este v_1 . Să se afle viteza maximă a unui punct ce descrie oscilația rezultantă, respectiv a doua oscilație.

Soluție. Avem

$$v_1 = A_1 \omega \quad (1)$$

de unde

$$\omega = \frac{v_1}{A_1}. \quad (2)$$

Asemănător

$$v_{max} = A \omega = \frac{A}{A_1} v_1 \quad (3)$$

$$(v_{max})_2 = \omega A_2 = \frac{A_2}{A_1} v_1. \quad (4)$$

4.9. O mișcare oscilatorie amortizată este descrisă de relația $y = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$. Să se găsească o relație îndeplinită de elongație y , viteză v și accelerație a .

Soluție. Avem

$$v = \frac{dy}{dt} = -\delta A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + A e^{-\delta t} \omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \delta^2 A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) - A \delta e^{-\delta t} \omega \cos(\omega t + \varphi) - A \delta \omega e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega^2 A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Se observă că

$$a + 2\delta v + y(\omega^2 + \delta^2) = 0 \quad (3)$$

care este relația cerută.

4.10. Două mobile execută oscilațiile $x_1 = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ și $x_2 = A \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$. Se cere:

a) timpul după care distanța dintre mobile este minimă;

b) timpul minim după care are loc a doua întâlnire?

Soluție. a) Distanța minimă dintre mobile va fi

$$d = x_2 - x_1 = 0 \quad (1)$$

sau

$$x_2 = x_1 \quad (2)$$

sau

$$\omega_1 t + \varphi_1 - (\omega_2 t + \varphi_2) = 2k\pi \quad (3)$$

de unde

$$[t]_{d=0} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + 2k\pi}{\omega_1 - \omega_2}. \quad (4)$$

Pentru $k = 0$, avem

$$[t]_{d=0}^{k=0} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\omega_1 - \omega_2}. \quad (5)$$

b) Perioada de întâlnire va fi

$$T = [t]_{k=1} - [t]_{k=0} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}. \quad (6)$$

4.11. Un electron se mișcă într-un câmp electric conform legii

$$x = \frac{eE}{mk} \left(t - \frac{\sin kt}{k} \right)$$

unde e este sarcina electronului de masă m , E amplitudinea câmpului electric, iar k o constantă. Se cer valorile *extreme* ale vitezei electronului.

Soluție. Avem

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{eE}{m} (1 - \cos kt); \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{eE}{m} k \sin kt. \quad (1)$$

Prin anularea accelerației, se obține

$$kt = n\pi \quad (2)$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$. Avem pentru $n=0$

$$v = v_{\min} = 0 \quad (3)$$

și pentru $n=1$

$$v = v_{\max} = \frac{2eE}{mk} \quad (4)$$

4.12. Un mobil execută o mișcare de ecuații parametrice

$$x = a \cos^2 kt, \quad y = a \sin^2 kt.$$

Se cere:

a) Să se arate că mișcarea este *oscilatorie* și să se calculeze *amplitudinea* mișcării.

b) Să se determine viteza mobilului la un moment dat precum și viteza sa *maximă*.

c) Să se determine legea de mișcare a mobilului.

Soluție. a) Ecuația traiectoriei este dreaptă

$$x + y = a \quad (1)$$

care trece prin punctele $M_1(a; 0)$ și $M_2(0, a)$, conform fig. 4.12. Se observă că pentru $t=0$, avem

$$x_0 = a \quad (2)$$

$$y_0 = 0.$$

deci mișcarea începe din punctul M_1 .

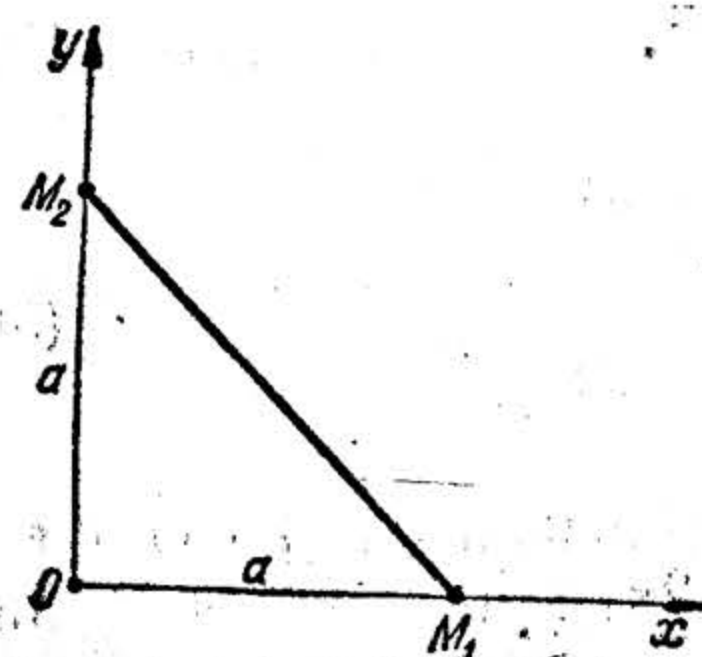


Fig. 4.12

Pentru $t_1 = \pi/2k$ avem

$$x_1 = 0 \quad (3)$$

$$y_1 = a$$

deci mobilul ajunge în punctul M_2 .

După $t_2 = 2t_1 = \pi/k$, avem din nou

$$x_2 = a \quad (4)$$

$$y_2 = 0.$$

Deci, mișcarea este oscilatorie, cu perioada

$$T = \frac{\pi}{k} \quad (5)$$

Amplitudinea mișcării este segmentul $\frac{1}{2} M_1 M_2$, adică

$$A = \frac{1}{2} \overline{M_1 M_2} = a \sqrt{2}/2. \quad (6)$$

b) Derivăm ecuațiile parametrice în raport cu timpul și avem

$$v_x = \dot{x} = -ak \sin 2kt \quad (7)$$

$$v_y = \dot{y} = ak \sin 2kt$$

de unde

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = ak\sqrt{2} \sin 2kt \quad (8)$$

$$v_{\max} = ak\sqrt{2}. \quad (9)$$

c) Legea de mișcare va avea expresia

$$s = \int v dt = \int ak\sqrt{2} \sin 2kt dt \quad (10)$$

sau

$$s = a\sqrt{2} \sin^2 kt. \quad (11)$$

V. PRINCIPIILE DINAMICII. ENERGIA MECANICĂ

5.1. O picătură de ploaie cu masa inițială m_0 cade prin atmosferă și se vaporizează totodată cu viteza constantă k kg/s. După cât timp energia cinetică a picăturii este maximă și ce valoare are această energie?

Soluție. Viteza la evaporare este

$$k = \frac{m'}{t} \quad (1)$$

unde m' este masa ce se evaporă în timpul t .

La un moment dat, masa picăturii este

$$m = m_0 - m' = m_0 - kt \quad (2)$$

iar energia ei cinetică

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m_0 - kt}{2} g^2 t^2. \quad (3)$$

Derivata energiei cinetice în raport cu timpul este

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{g^2}{2} (2m_0 t - 3kt^2). \quad (4)$$

Din anularea ei avem

$$[t]_{E_c = E_{c \max}} = \frac{2m_0}{3k} \quad (5)$$

$$E_{c \max} = \frac{3m_0^3 g^2}{27k^2}. \quad (6)$$

5.2. Se dau trei sfere de mase m_1, m_2, m_3 așezate coliniar și inițial în repaus. Sfera 1 este scoasă din repaus și ciocnește a doua sferă cu viteza v_1 , iar a doua pe a treia. Să se determine valoarea masei sferei mijlocii pentru ca viteza celei de a treia sfere să fie maximă și să se determine această viteză (ciocnirile sînt elastice).

Soluție. Viteza sferei din mijloc, după ciocnire, are valoare

$$v_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Analog, viteza ultimei sfere, după ciocnirea ei de a doua sferă, este

$$v_3 = \frac{4m_1 m_2 v_1}{m_2^2 + m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}. \quad (2)$$

Derivata acestei viteze, în raport cu m_2 are valoarea

$$\frac{dv_3}{dm_2} = \frac{4m_1^2 m_3 v_1 - 4m_1 m_2^2 v_1}{(m_2^2 + m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)^2}$$

Din anularea ei, rezultă

$$[m_2]_{v_3 = v_{3 \max}} = \sqrt{m_1 m_3}$$

respectiv

$$v_{3 \max} = \frac{4m_1 v_1 \sqrt{m_1 m_3}}{\sqrt{m_1 m_3} (m_1 + m_3) + 2m_1 m_3}$$

5.3. Un corp se află pe un plan înclinat sub un unghi α avînd coeficientul de frecare μ . Cu ce forță minimă trebuie să tragem de plan pentru ca corpul (care nu părăsește planul) să înceapă urcarea pe plan? (Masa corpului este m) (fig. 5.3).

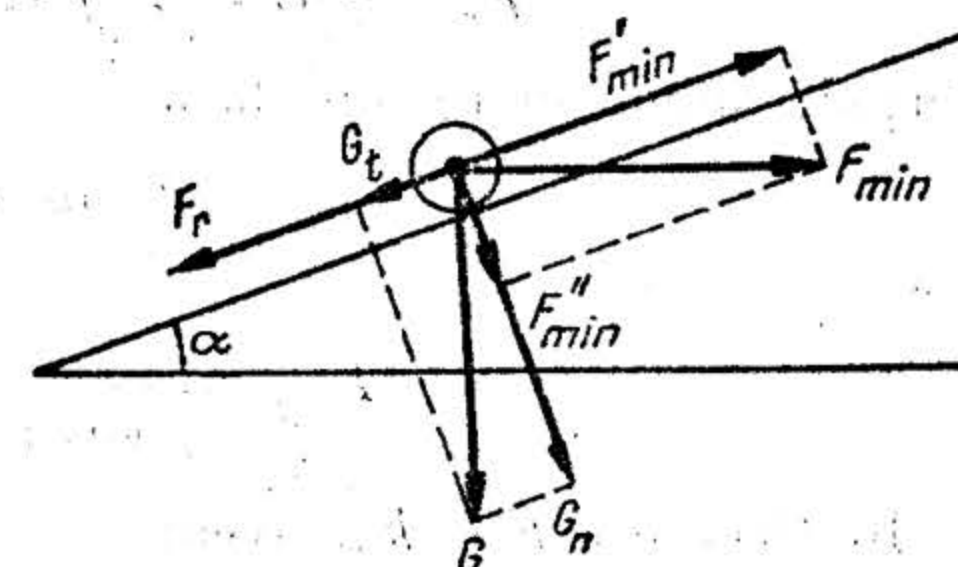


Fig. 5.3

Soluție. Corpul începe să urce dacă

$$F_{\min} \cos \alpha \geq G_t + F_r \quad (1)$$

unde

$$F_r = \mu(mg \cos \alpha + F_{\min} \sin \alpha). \quad (2)$$

Avem

$$F_{\min} \cos \alpha \geq mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha + \mu F_{\min} \sin \alpha \quad (3)$$

sau

$$F_{\min} (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \geq mg (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \quad (4)$$

de unde

$$F_{\min} \geq mg \frac{\mu + \tan \alpha}{1 - \mu \tan \alpha}. \quad (5)$$

5.4. Asupra unui corp așezat pe un plan orizontal se acționează cu o forță F prin intermediul unui resort cu masă neglijabilă după direcția și sensul din figură. Cunoscând masa corpului (m), constanta elastică a resortului (k) și coeficientul de frecare (μ) se cere:

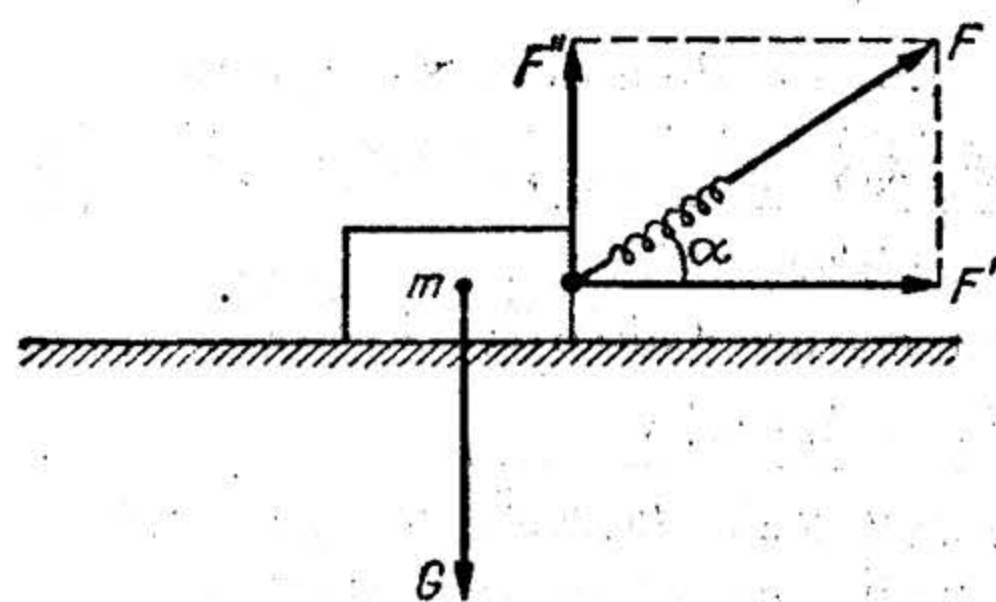


Fig. 5.4

- a) valoarea maximă a forței F cu care se acționează astfel încât corpul să rămână încă în repaus;
b) valoarea minimă a energiei de deformare a resortului pentru care corpul poate fi scos din repaus (unghiul α este cunoscut) (fig. 5.4).

Soluție. Componentele forței F sînt

$$\begin{aligned} F' &= F \cos \alpha \\ F'' &= F \sin \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Forța de frecare are valoarea

$$F_r = \mu(G - F'') = \mu(mg - F \sin \alpha). \quad (2)$$

Corpul rămîne în repaus dacă

$$F \cos \alpha \leq F_r \quad (3)$$

sau

$$F_{\max} = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}. \quad (4)$$

b) Deoarece $F = ky$, avem

$$y = \frac{\mu mg}{k(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} \quad (5)$$

deci

$$E_{p \min} = \frac{ky^2}{2} = \frac{\mu^2 m^2 g^2}{2k(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2}. \quad (6)$$

5.5. Se dă forța $F = (m + 3)\mathbf{i} + (3m - 4)\mathbf{j} + (6 + 3m)\mathbf{k}$, care își deplasează punctul de aplicație pe distanța

$$\mathbf{d} = (2m - 1)\mathbf{i} + (m - 1)\mathbf{j} + (4m - 1)\mathbf{k}.$$

Se cer valorile parametrului m astfel ca lucrul mecanic al forței să fie cuprins între 100 J și 200 J.

Soluție. Lucrul mecanic al forței este

$$L = F \cdot d = 17m^2 + 19m - 5. \quad (1)$$

Revine să rezolvăm inegalitatea

$$100 < 17m^2 + 19m - 5 < 200 \quad (2)$$

de unde

$$m \in (-\infty, -5, 4] \cup [-4; 3] \cup [4, 3; +\infty).$$

5.6. Un mobil este aruncat pe verticală cu viteza inițială v_0 . Să se arate că există două momente de timp în care energia cinetică a corpului este egală cu energia potențială și să se determine aceste momente.

Soluție. Avem

$$\frac{mv^2}{2} = mg \left(v_0 t - \frac{gt^2}{2} \right) \quad (1)$$

sau

$$(v_0 - gt)^2 = 2gv_0 t - g^2 t^2 \quad (2)$$

sau

$$2g^2 t^2 - 4v_0 g t + v_0^2 = 0 \quad (3)$$

de unde

$$t_{1,2} = \frac{v_0(2 \pm \sqrt{2})}{2g}. \quad (4)$$

5.7. Un corp alunecă fără frecare pe un plan inclinat.

a) Să se arate că dacă secțiunea planului inclinat este un triunghi dreptunghic isoscel, atunci timpul de alunecare din vîrf la bază este minim.

b) Să se calculeze în acest caz, pentru valoarea b , a catetei orizontale, diferența de energie potențială a corpului de masă m la sfîrșitul primei și începutul ultimei secunde de mișcare (fig. 5.7).

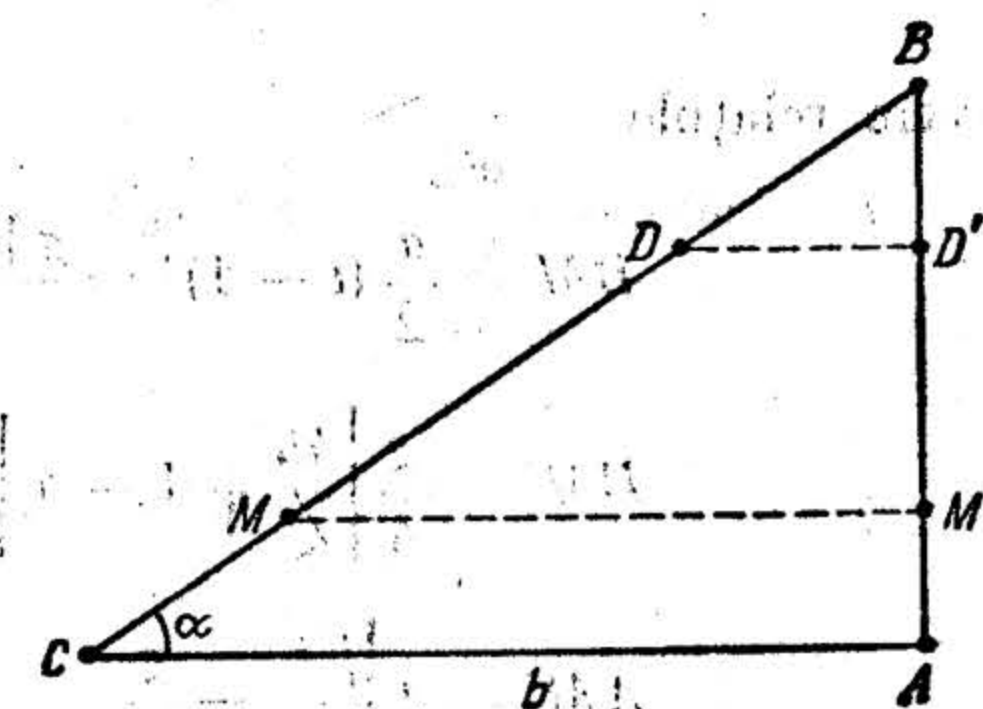


Fig. 5.7

Soluție. a) Accelerația corpului pe plan este

$$a = g \sin \alpha \quad (1)$$

iar timpul de alunecare

$$t = \sqrt{\frac{2BC}{g \sin \alpha}} = 2 \sqrt{\frac{b}{g \sin 2\alpha}}. \quad (2)$$

Timpul este *minim* dacă $\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$. În acest caz avem

$$t_{\min} = 2 \sqrt{\frac{b}{g}}. \quad (3)$$

$$a = g \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (4)$$

b) Avem relațiile

$$DB = \frac{a}{2} \cdot t^2 = \frac{g\sqrt{2}}{4} \quad (5)$$

$$BD' = DB \sin \alpha = \frac{g}{4}$$

$$AD' = b - \frac{g}{4} = \frac{4b - g}{4}$$

deci

$$E_{pD'} = mg \cdot AD' = \frac{4bmg - mg^2}{4}. \quad (6)$$

Avem relațiile

$$BM = \frac{a}{2} (t - 1)^2 = \frac{g\sqrt{2}}{4} \left[\frac{4b}{g} + 1 - 4 \sqrt{\frac{b}{g}} \right]$$

$$BM' = \frac{g}{4} \left[\frac{4b}{g} + 1 - 4 \sqrt{\frac{b}{g}} \right] \quad (7)$$

$$AM' = g \sqrt{\frac{b}{g}} - \frac{g}{4}$$

deci

$$E_{pM'} = mg^2 \sqrt{\frac{b}{g}} - \frac{mg^2}{4} \quad (8)$$

$$\Delta E_p = mg \left(b - g \sqrt{\frac{b}{g}} \right). \quad (9)$$

5.8. Asupra unui corp de masă m pot acționa trei forțe, ca în figură. Să se afle aceste forțe, dacă se îndeplinesc condițiile:

a) acționind numai prima și a doua forță corpul se deplasează uniform variat spre dreapta, parcurgând spațiul s în timpul t ;

b) acționind numai a doua și a treia forță, corpul se mișcă uniform spre stnga;

c) sub acțiunea simultană a celor trei forțe, corpul începe să se ridice uniform spre verticală. Se cunoaște coeficientul de frecare μ pentru primele două situații precum și unghiurile α_1 și α_2 (fig. 5.8).

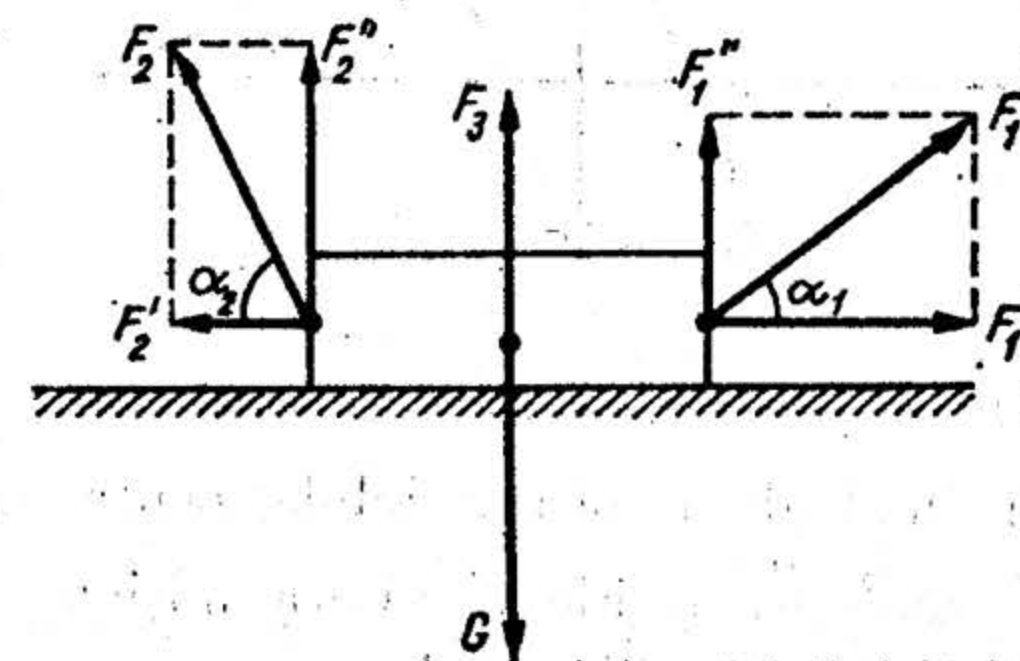


Fig. 5.8

Soluție. Rezultă că în primul caz accelerația mișcării va fi

$$a = \frac{2s}{t^2}. \quad (1)$$

Pentru primul caz este valabilă relația

$$F_1 \cos \alpha_1 + \mu F_1 \sin \alpha_1 + \mu F_2 \sin \alpha_2 - F_2 \cos \alpha_2 = \frac{2ms}{t^2} + \mu mg. \quad (2)$$

Pentru a doua situație putem scrie

$$F_2 \cos \alpha_2 = \mu [mg - F_3 - F_2 \sin \alpha_2]. \quad (3)$$

Pentru ultimul caz avem

$$mg = F_3 + F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2. \quad (4)$$

Din aceste relații deducem

$$F_1 = \frac{\mu mgt^2 + 2ms}{t^2(\cos \alpha_1 + \mu^2 \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2)} \quad (5)$$

$$F_2 = \frac{\mu mgt^2 + 2ms}{t^2(\cos \alpha_1 + \mu^2 \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2)} \cdot \mu \sin \alpha_1 \sec \alpha_2 \quad (6)$$

$$F_3 = mg - (F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2) \quad (7)$$

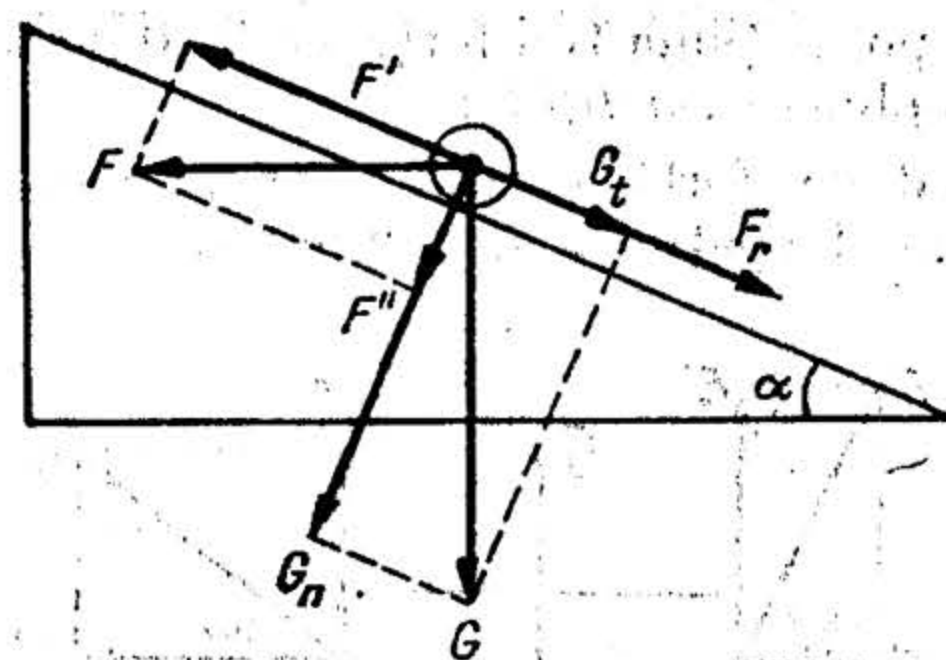


Fig. 5.9

5.9. Un corp este lansat pe un plan înclinat sub unghiul α și apoi revine la baza planului.

a) Știind că timpul de urcare este de k ori mai mic decât cel de coborire, să se determine coeficientul de frecare dintre corp și plan.

b) Corpul se află pe plan (frecarea este determinată la primul punct). Cu ce accelerație minimă orizontală trebuie împins planul

înclinat (de masă neglijabilă) pentru ca corpul să urce pe plan (fig. 5.9)?

Soluție. a) Fie v_0 viteza inițială de lansare a corpului. Timpul de urcare a acestuia va fi

$$t_n = \frac{v_0}{a_n} = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} \quad (1)$$

El parcurge pe plan un spațiu de valoarea

$$s_{op} = \frac{v_0^2}{2a_n} = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} \quad (2)$$

Din punctul de oprire, corpul va aluneca spre bază cu accelerația

$$a_c = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (3)$$

în timpul

$$t_c = \sqrt{\frac{2s_{op}}{a_c}} = \sqrt{\frac{2v_0^2}{2a_n \cdot a_c}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2(\sin^2 \alpha - \mu^2 \cos^2 \alpha)}} \quad (4)$$

Din condiția problemei

$$t_c = kt_n \quad (5)$$

găsim

$$k^2 \sin \alpha - k^2 \mu \cos \alpha = \sin \alpha + \mu \cos \alpha \quad (6)$$

de unde

$$\mu = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (7)$$

b) Forța care împinge accelerat planul (și implicit corpul) nu poate fi dirijată decât spre cateta verticală a planului (fig. 5.9). Avem

$$F' = F_r + G_t \quad (8)$$

unde

$$\begin{aligned} F' &= ma \cos \alpha \\ G_t &= mg \sin \alpha \end{aligned} \quad (9)$$

$$F_r = \mu(G_n + F'') = \mu(mg \cos \alpha + ma \sin \alpha).$$

Rezultă

$$a = g \cdot \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \quad (10)$$

sau

$$a_{min} = g \cdot \frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha} \quad (\text{spre dreapta}). \quad (11)$$

5.10. Un corp este menținut în echilibru pe un plan înclinat de unghi α , fie cu o forță minimă orizontală, fie cu o forță minimă normală pe plan, de k ori mai mare decât prima. Se cere coeficientul de frecare dintre corp și plan.

Soluție. Cele două forțe nu pot avea decât orientările din figura 5.10, a și b. În primul caz corpul este în echilibru dacă

$$F' + F_r = G_t \quad (1)$$

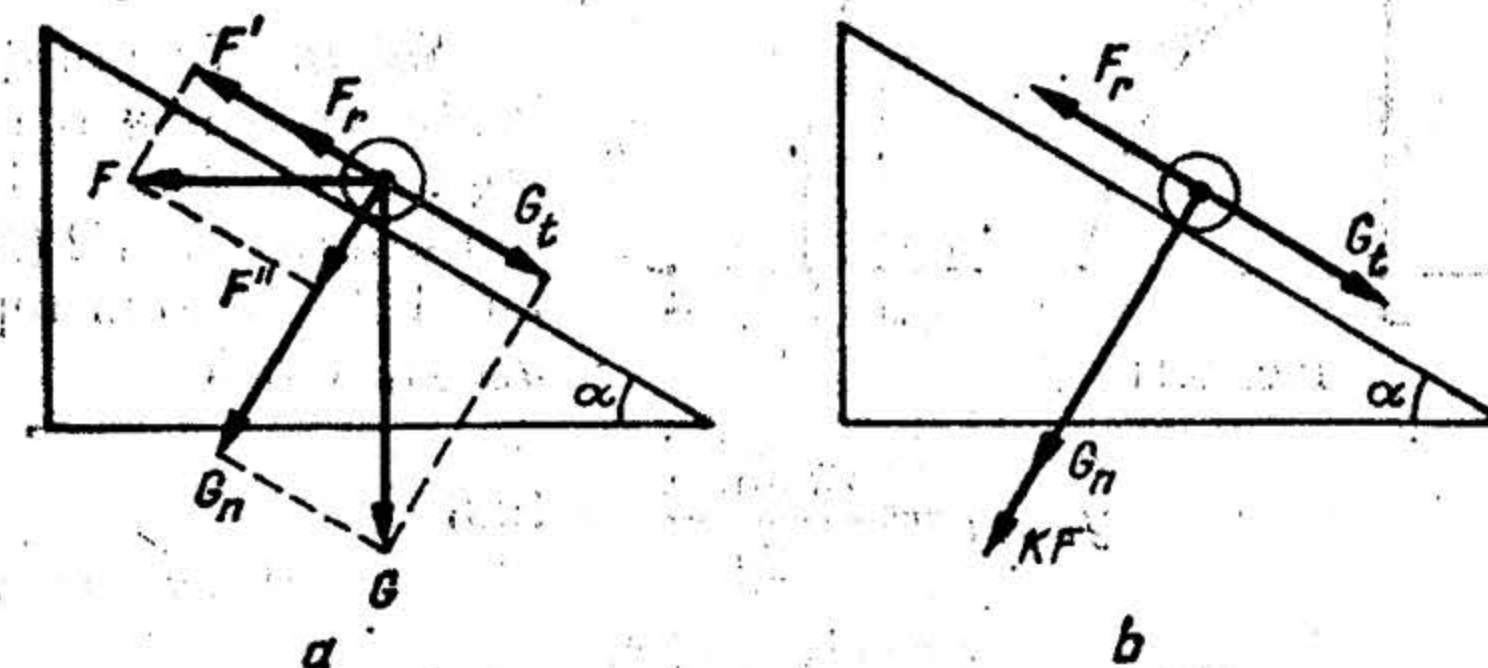


Fig. 5.10

unde

$$\begin{aligned} G_t &= mg \sin \alpha \\ F' &= F \cos \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

$$F_r = \mu(G_n + F'') = \mu(mg \cos \alpha + F \sin \alpha).$$

În al doilea caz corpul va fi în echilibru dacă

$$G_t = F_r \quad (3)$$

unde

$$F_r = \mu(G_n + kF) \quad (4)$$

sau

$$F_r = \mu(mg \cos \alpha + kF). \quad (5)$$

Avem

$$k\mu = \cos \alpha + \mu \sin \alpha \quad (6)$$

de unde

$$\mu = \frac{\cos \alpha}{k - \sin \alpha}. \quad (7)$$

5.11. Un corp aruncat oblic urcă pînă la înălțimea *maximă* de 19,6 m și explodează în două fragmente de mase egale. Unul din ele cade pe verticala locului amintit pînă la pămînt în timp de 1 s, la 1 000 m de locul lansării, iar celălalt își continuă mișcarea. La ce depărtare *maximă* de locul aruncării cade pe pămînt cel de al doilea fragment (fig. 5.11)?

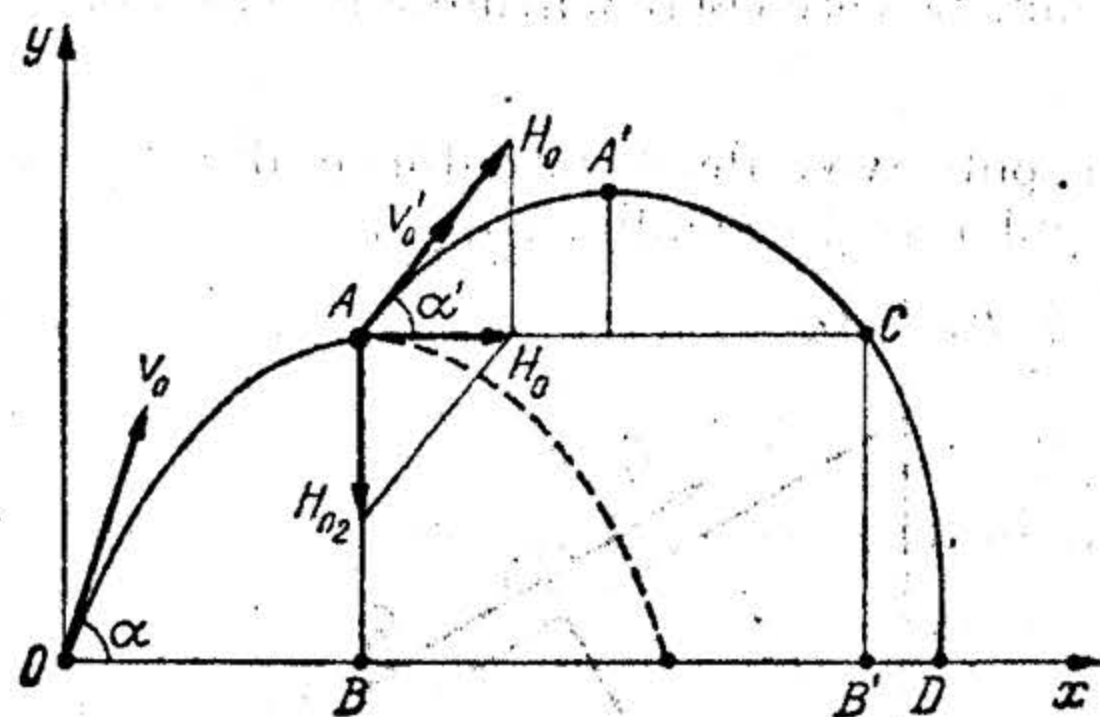


Fig. 5.11

Soluție. În notațiile utilizate la aruncarea oblică, segmentul $OB = 1\,000$ m reprezintă $x_{\max 1}/2$ (fig. 5.11) iar $AB = 19,6$ m reprezintă $y_{\max 1}$, adică

$$y_{\max 1} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 19,6 \quad (1)$$

de unde

$$v_0 \sin \alpha = 19,6 \text{ m/s.} \quad (2)$$

Asemănător

$$OB = \frac{x_{\max 1}}{2} = 1\,000 = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2g} \quad (3)$$

de unde

$$v_0 \cos \alpha = 500 \text{ m/s.} \quad (4)$$

În punctul A, componenta verticală a lui v_0 se anulează, deci impulsul înainte exploziei este

$$H_0 = mv_0 \cos \alpha = 500 \text{ kg} \cdot \text{m/s.} \quad (5)$$

Trebuie să controlăm dacă fragmentul ce coboară va cade liber sau este azvîrlit. Dacă ar cade liber, timpul de cădere ar trebui să fie de 2 s. În consecință, fragmentul 2 (care cade) este împins în jos cu viteza de v_{02} dată de relația

$$19,6 = v_{02} \cdot 1 + \frac{9,8 \cdot 1^2}{2} \quad (6)$$

adică

$$v_{02} = 14,7 \text{ m/s.}$$

Impulsul inițial al bucății care cade va fi

$$H_{02} = \frac{m}{2} \cdot v_{02} = 7,35 \text{ kg} \cdot \text{m/s.} \quad (7)$$

(Corpul de masă m s-a divizat în două bucăți de mase $m/2$.)

Primul fragment suferă o nouă aruncare oblică din punctul A cu o viteză de v'_0 sub unghi α' . Conform legii conservării impulsului avem

$$H_c = H_{02} + H_{01} \quad (8)$$

iar în modul

$$H_{01} = \sqrt{H_0^2 + H_{02}^2} = 505,2 \text{ kg} \cdot \text{m/s.} \quad (9)$$

deci

$$v'_0 = \frac{H_{01}}{\frac{m}{2}} = 1\,010,4 \text{ m/s} \quad (10)$$

$$\cos \alpha' = \frac{H_0}{H_{01}} = \frac{500}{505,2} \quad (11)$$

$$\sin \alpha' = \frac{H_{02}}{H_{01}} = \frac{7,35}{505,2} \quad (12)$$

Noua bătaie va fi

$$x_{\max 2} = AC = \frac{2v_0'^2 \sin \alpha' \cos \alpha'}{g} = 3\,000 \text{ m.} \quad (13)$$

Ajuns în punctul C , primul fragment își continuă mișcarea sub forma unei aruncări pe orizontală cu viteza inițială $v'_0 \cos \alpha$, în timp de 1 s (căci $AB = CB'$). Deci

$$x_3 = B'D = v'_0 \cos \alpha' = 1000 \text{ m.} \quad (14)$$

Rezultă

$$x_{\max} = \frac{x_{\max 1}}{2} + x_{\max 2} + x_3 = 5000 \text{ m.} \quad (15)$$

5.12. O minge de dimensiuni mici, avînd un coeficient de restituire k , este aruncată dintr-un punct O_1 , cu viteza v_1 sub unghiul α_1 față de orizontală. Mingea revine pe orizontală în punctul O_2 , de unde își continuă mișcarea sub unghiul α_2 . Se continuă mișcările oblice în punctele O_3, O_4, \dots, O_n sub unghiurile $\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$, pînă la *oprire* (fig. 5.12). Se cer:

- spațiul maxim parcurs de minge pe orizontală;
- timpul maxim de mișcare.

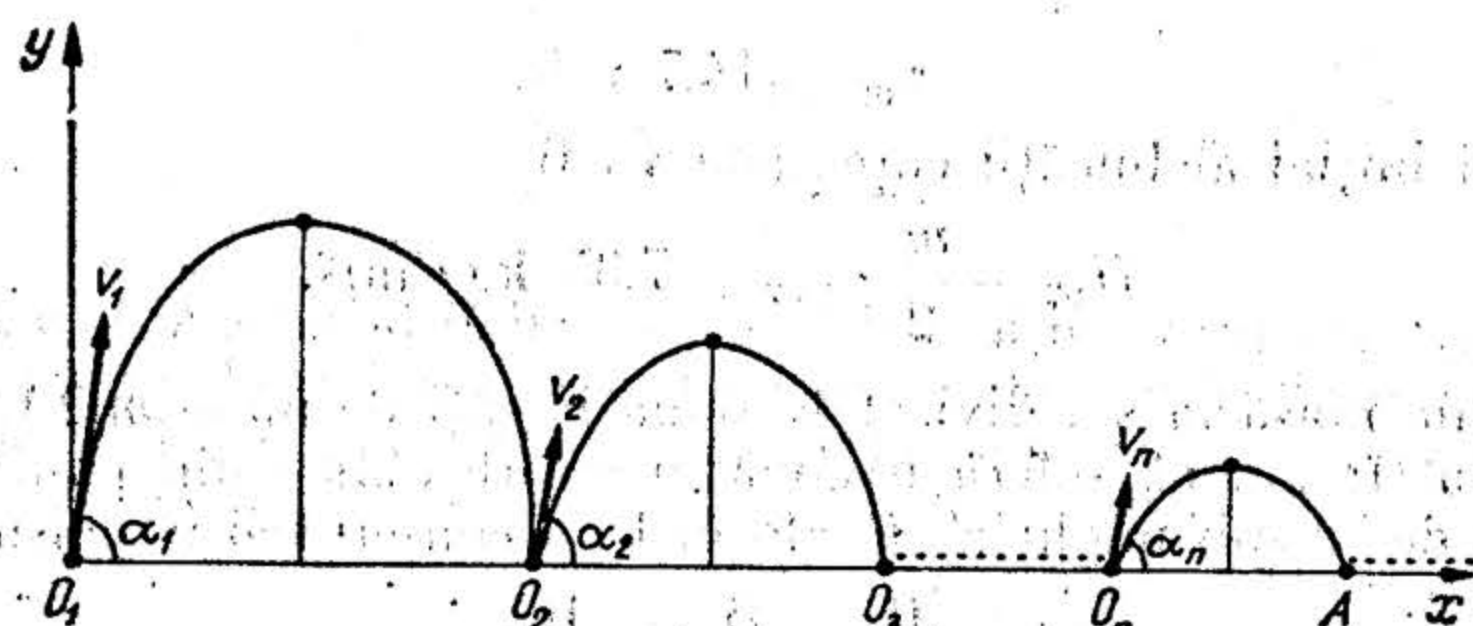


Fig. 5.12

Soluție. a) În punctul O_2 (al primei reveniri la sol) avem

$$\begin{aligned} v_1 \cos \alpha_1 &= v_2 \cos \alpha_2 \\ kv_1 \sin \alpha_1 &= v_2 \sin \alpha_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Din teoria aruncării oblice avem

$$\begin{aligned} O_1O_2 &= \frac{2v_1^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{g} \\ O_2O_3 &= \frac{2v_2^2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{g} \\ &\vdots \\ O_nA &= \frac{2v_n^2 \cos \alpha_n \sin \alpha_n}{g} \end{aligned} \quad (2)$$

Se observă că

$$\begin{aligned} \overline{O_2O_3} &= k \cdot \overline{O_1O_2} \\ \overline{O_3O_4} &= k^2 \cdot \overline{O_1O_2} \\ &\vdots \\ \overline{O_nA} &= k^n \overline{O_1O_2} \end{aligned} \quad (3)$$

deci

$$x_{\max} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{O_1A} = \lim_{n \rightarrow \infty} [\overline{O_1O_2} \cdot (1 + k + k^2 + \dots + k^n)] \quad (4)$$

sau

$$x_{\max} = \frac{\overline{O_1O_2}}{1 - k} \quad (5)$$

adică

$$x_{\max} = \frac{v_1^2 \sin 2\alpha_1}{g(1 - k)} \quad (6)$$

Tot din teoria aruncării oblice se știe că timpul necesar primei reveniri este

$$t_{O_1O_2} = \frac{2v_1 \sin \alpha_1}{g} \quad (7)$$

Similar

$$\begin{aligned} t_{O_2O_3} &= \frac{2v_2 \sin \alpha_2}{g} = kt_{O_1O_2} \\ &\vdots \\ t_{O_nA} &= k^n t_{O_1O_2} \end{aligned} \quad (8)$$

deci

$$t_{\max} = \lim_{n \rightarrow \infty} (t_{O_1O_2} + t_{O_2O_3} + \dots + t_{O_nA}) = t_{O_1O_2} \cdot \frac{1}{1 - k} \quad (9)$$

sau

$$t_{\max} = \frac{2v_1 \sin \alpha_1}{g(1 - k)} \quad (10)$$

5.13. În lungul marginii unei platforme orizontale în formă de disc cu masă M și raza R se poate deplasa un vagonet de masă m . Sistemul format din disc și vagonetul în repaus pe disc se rotește cu viteza un-

ghiulară ω_0 în jurul axei verticale prin centrul discului orizontal. Vagonetul începe să se rotească pe disc cu viteza u față de platformă. Între ce limite este cuprinsă noua viteză unghiulară de rotație (fig. 5.13)?

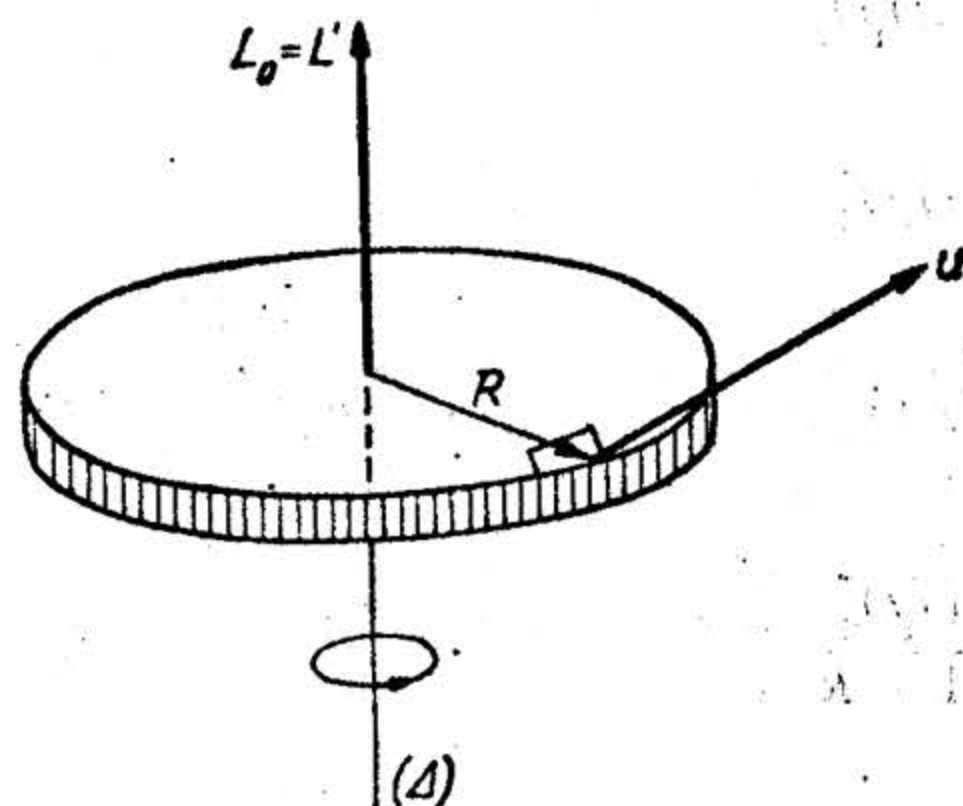


Fig. 5.13

Soluție. Considerînd sistemul mecanic dat ca un sistem izolat, rezultă că momentul cinetic se conservă. Momentul de inerție al discului va fi

$$I_{D(\Delta)} = \frac{MR^2}{2} \quad (1)$$

iar al vagonetului

$$I_{v(\Delta)} = mR^2. \quad (2)$$

Deci, momentul cinetic inițial (la ω_0) este

$$L_0 = \omega_0 [I_{D(\Delta)} + I_{v(\Delta)}] = \omega_0 \left(\frac{MR^2}{2} + mR^2 \right). \quad (3)$$

Cînd se deplasează vagonetul, viteza lui absolută va fi

$$v = u + \omega R \quad (4)$$

unde ω este noua viteză unghiulară. Noul moment cinetic al vagonetului va fi

$$L'_v = m(uR + \omega R^2) \quad (5)$$

iar al sistemului

$$L' = \frac{\omega MR^2}{2} + m(uR + \omega R^2). \quad (6)$$

Din condiția de conservare

$$L_0 = L' \quad (7)$$

rezultă

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{m}{0,5M + m} \cdot \frac{u}{R} \quad (8)$$

deci

$$\omega_{\max} = \omega_0 + \frac{mu}{R(0,5M + m)} \quad (9)$$

cînd vagonetul se rotește în sens contrar rotației inițiale a discului și

$$\omega_{\min} = \omega_0 - \frac{mu}{R(0,5M + m)} \quad (10)$$

cînd cele două rotații se fac în același sens.

5.14. Două sfere cu masele m_1 și m_2 se deplasează în același sens cu vitezele v_1 și v_2 și se ciocnesc central. La începutul ciocnirii, o parte din energia cinetică se transformă în energie potențială de deformare care apoi se retransformă în energie cinetică. Se cere valoarea maximă a energiei potențiale de deformare.

Soluție. În momentul deformăției maxime, corpurile se deplasează împreună cu aceeași viteză v . În acest moment, conservarea energiei și impulsului ne dă

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + E_{p \max} \quad (1)$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v. \quad (2)$$

După efectuarea calculelor rezultă

$$E_{p \max} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2. \quad (3)$$

5.15. Una din metodele de determinare a coeficientului de frecare folosește instalația din figură, în care se știe că $m_2 = km_1$. Se măsoară timpul t_1 în care masa 2 atinge solul. Se inversează poziția corpului și atunci timpul în care masa 1 atinge solul este t_2 ($t_2 = k't_1$). Știind că sînt îndeplinite condițiile $k > 1$; $k' > 1$, să se determine coeficientul de frecare.

Soluție. În primul caz accelerația sistemului are valoarea

$$a_1 = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g \quad (1)$$

iar sistemul se mișcă timp de

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{a_1}}. \quad (2)$$

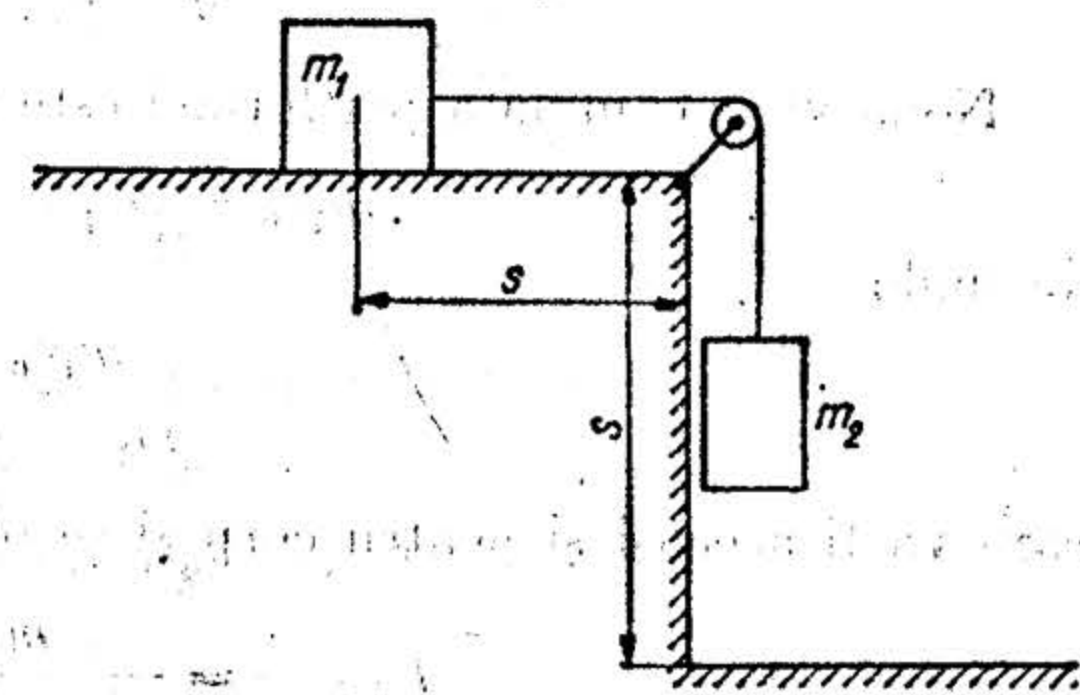


Fig. 5.15

În al doilea caz accelerația are valoarea

$$a_2 = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} g \quad (3)$$

iar timpul de deplasare

$$t_2 = \sqrt{\frac{2s}{a_2}} \quad (4)$$

Din condiția $t_2 = k't_1$ avem

$$\frac{a_1}{a_2} = k'^2 \quad (5)$$

Din (1), (3), (5), avem

$$\frac{k - \mu}{1 - \mu k} = k'^2 \quad (6)$$

de unde

$$\mu = \frac{k'^2 - k}{kk'^2 - 1} \quad (7)$$

5.16. O platformă de masă m_1 se deplasează pe orizontală fără frecare cu viteza v_0 . În partea din față a platformei se așază un mic corp de masă m_2 fără viteză inițială. Se cere lungimea minimă a platformei pentru ca respectivul corp să n-o părăsească (coeficientul de frecare dintre corp și platformă μ).

Soluție. Sub influența forței de frecare, corpul se deplasează cu accelerația

$$a = \mu g \quad (1)$$

Noua viteză finală a platformei este dată de conservarea impulsului

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v \quad (2)$$

de unde

$$v = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

care va fi aceeași și pentru corp și se obține după timpul

$$t = \frac{v}{a} = \frac{m_1 v_0}{(m_1 + m_2) \mu g} \quad (4)$$

În acest timp corpul parcurge pe platformă spațiul

$$s_c = \frac{v^2}{2\mu g} \quad (5)$$

iar platforma pe orizontală

$$s_p = \frac{v_0 + v}{2} t \quad (6)$$

Corpul rămâne pe platformă dacă lungimea acesteia îndeplinește condiția

$$l_{\min} \geq s_p - s_c \quad (7)$$

de unde

$$l_{\min} \geq \frac{m_1 v_0^2}{2\mu g(m_1 + m_2)} \quad (8)$$

5.17. Se dă o suprafață orizontală pe care se așază două corpuri de mase egale cu m , legate printr-un resort de constantă elastică k (se neglijează frecarea dintre corpuri și orizontală). Se lansează spre unul din corpuri (fig. 5.17) un al treilea corp de aceeași masă cu viteza v . Se cere:

a) Să se arate că cele două corpuri (1 și 2) se vor deplasa, după ciocnire, în același sens.

b) Să se calculeze vitezele corpurilor 1 și 2 în momentul în care resortul este maxim întins.

c) Distanța dintre corpurile 1 și 2 în momentul stabilit la punctul precedent.

Soluție. a) Notăm cu v_1 și v_2 vitezele corpurilor 1 și 2 imediat după ciocnirea $3 \rightarrow 1$ și cu y elongația resortului elastic.

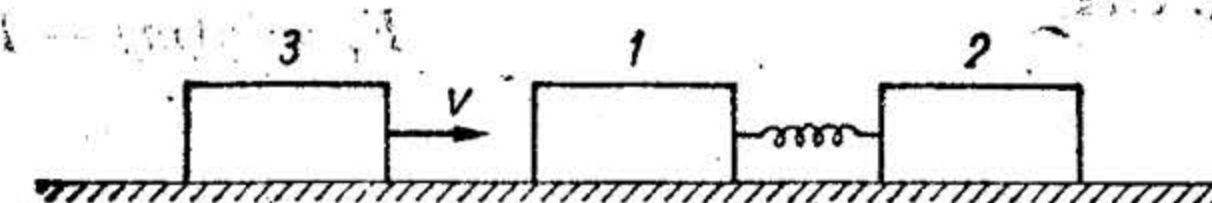


Fig. 5.17

Conservarea impulsului și a energiei mecanice ne dă

$$m(v_1 + v_2) = mv \quad (1)$$

$$m(v_1^2 + v_2^2) + ky^2 = mv^2 \quad (2)$$

Rezultă

$$ky^2 = 2mv_1 v_2 \quad (2)$$

deci

$$v_1 v_2 = \frac{ky^2}{2m} \quad (3)$$

$$v_1 + v_2 = v.$$

Se observă că, întrucât vitezele v_1 și v_2 nu pot fi decât pozitive, cele două corpuri 1 și 2 se pot deplasa numai într-un singur sens (spre dreapta).

b) Se știe că dacă produsul a două numere este *maxim*, atunci numerele respective sînt egale, dacă suma lor este constantă, adică

$$v_1 = v_2 = \frac{v}{2}. \quad (4)$$

c) Rezultă că

$$d_{12} = l \pm y_{\max} = l \pm v \sqrt{\frac{m}{2k}}. \quad (5)$$

5.18. Un corp așezat pe o suprafață orizontală este acționat de o forță F care face unghiul α cu verticala (fig. 5.18). Se cere:

a) Valoarea unghiului α pentru care viteza corpului, după parcurgerea unei distanțe d , este *maximă*, precum și valoarea acestei viteze.

b) Valoarea *maximă* a forței F pentru care corpul rămîne în repaus, indiferent de valoarea unghiului α (corpul are masa m).

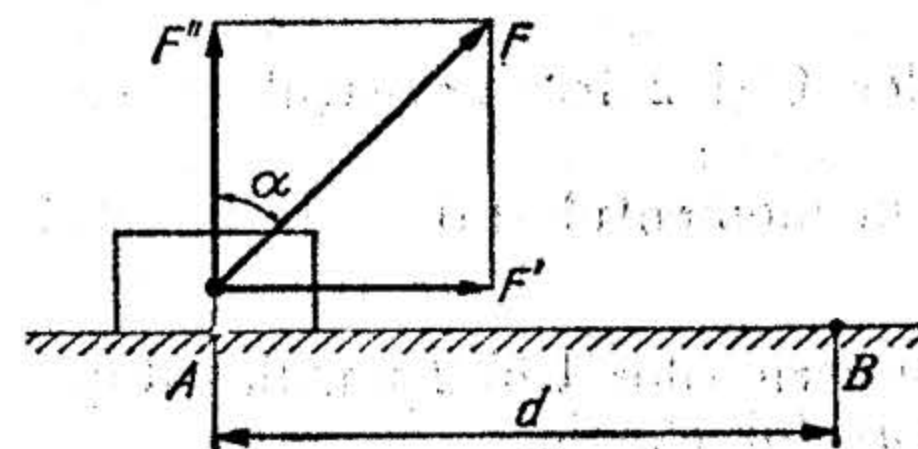


Fig. 5.18

Soluție. a) Avem

$$\begin{aligned} F' &= F \sin \alpha \\ F'' &= F \cos \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

$$F_r = \mu(mg - F'')$$

deci

$$F \sin \alpha = ma + \mu(mg - F \cos \alpha) \quad (2)$$

de unde

$$a = \frac{F(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) - \mu mg}{m} \quad (3)$$

Pe de altă parte avem

$$v_B = \sqrt{2ad} \quad (4)$$

de unde rezultă că dacă $a = a_{\max}$ și $v_B = v_{\max}$. Derivăm accelerația în raport cu timpul și prin anulare, avem

$$\alpha' = [\alpha]_a = a_{\max} = \operatorname{arctg} \mu. \quad (5)$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \sin \alpha' &= \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \\ \cos \alpha' &= \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \end{aligned} \quad (6)$$

deci

$$a_{\max} = [a]_{\alpha = \alpha'} = \frac{F}{m} \left(\frac{(1 + \mu^2)}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right) - \mu g \quad (7)$$

$$v_{\max} = \sqrt{2d \left[\frac{F}{m} \cdot \sqrt{1 + \mu^2} - \mu g \right]}. \quad (8)$$

b) Dacă $a < 0$, rezultă că corpul rămîne în repaus. Aceasta implică

$$F_{\max} \leq \frac{\mu mg \sqrt{1 + \mu^2}}{1 + \mu^2}. \quad (9)$$

VI. COMPUNEREA FORTELOR. ECHILIBRUL CORPURILOR

6.1. Un punct material M este atras de un sistem de puncte materiale M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) aflate în planul xOy în punctele de coordonate $x_i; y_i$. Forțele de atracție au forma $F_i = k_i r_{MM_i}$.

Să se afle coordonatele poziției de echilibru a punctului M .

Soluție. Fie x și y aceste coordonate. Distanțele dintre punctul M și punctele M_i vor fi:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j} \\ \mathbf{r}_2 &= (x - x_2)\mathbf{i} + (y - y_2)\mathbf{j} \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_n &= (x - x_n)\mathbf{i} + (y - y_n)\mathbf{j}. \end{aligned} \quad (1)$$

Forțele de atracție corespunzătoare au valorile

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= k_1[(x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j}] \\ \mathbf{F}_2 &= k_2[(x - x_2)\mathbf{i} + (y - y_2)\mathbf{j}] \\ &\vdots \\ \mathbf{F}_n &= k_n[(x - x_n)\mathbf{i} + (y - y_n)\mathbf{j}]. \end{aligned} \quad (2)$$

Pentru echilibru e necesar ca

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad (3)$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad (4)$$

sau

$$k_1(x - x_1) + k_2(x - x_2) + \dots + k_n(x - x_n) = \sum_{i=1}^n k_i(x - x_i) = 0 \quad (5)$$

$$k_1(y - y_1) + k_2(y - y_2) + \dots + k_n(y - y_n) = \sum_{i=1}^n k_i(y - y_i) = 0 \quad (6)$$

de unde rezultă coordonatele cerute

$$x = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i x_i}{\sum_{i=1}^n k_i} \quad (7)$$

$$y = \frac{k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i y_i}{\sum_{i=1}^n k_i} \quad (8)$$

6.2. Un fir inextensibil de lungime $l = 1,2$ m se rupe dacă de unul din capetele sale se suspendă un corp de o anumită greutate. Pentru a suspenda un corp cu greutatea de n ori mai mare ($n > 1$), se fixează capetele firului în punctele A și B astfel ca $AB = d = 0,72$ m (orizontal), iar corpul cu greutatea mărită se așază la mijlocul firului. Să se afle valoarea maximă a lui n pentru care firul rezistă (fig. 6.2).

Soluție. Din enunț rezultă

$$T_1 = T_2 = T = G_0 \quad (1)$$

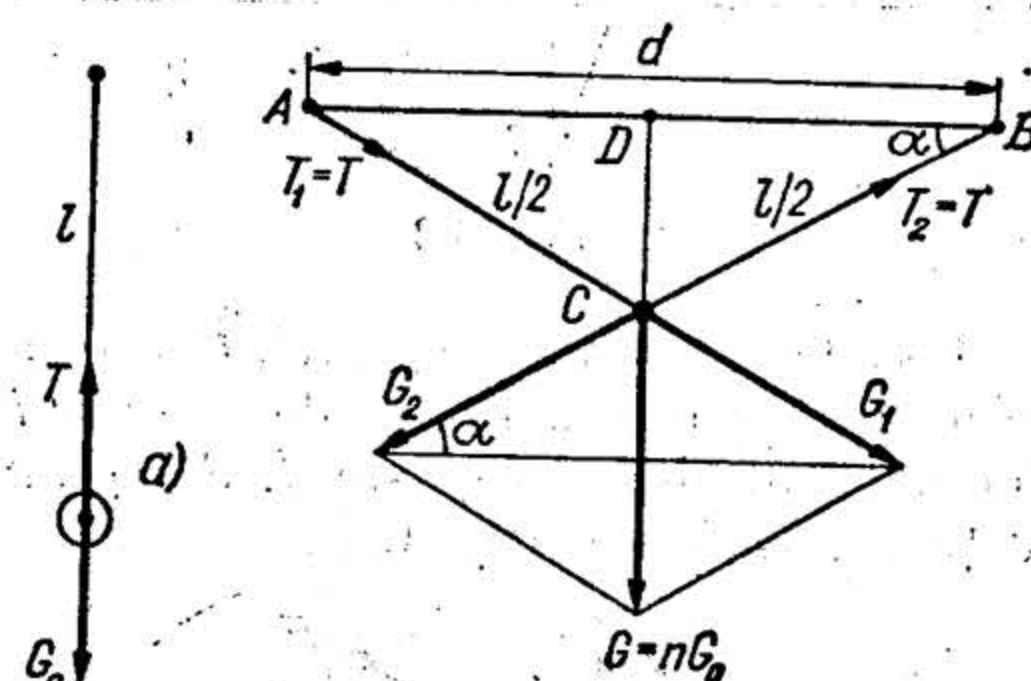


Fig. 6.2

$$G = nG_0. \quad (2)$$

Din figură avem

$$T = \frac{G}{2 \sin \alpha} = \frac{nG_0}{2 \sin \alpha} \quad (3)$$

de unde

$$n = 2 \sin \alpha. \quad (4)$$

Observînd că

$$\cos \alpha = \frac{BD}{AC} = \frac{d}{l} \quad (5)$$

găsim

$$(n)_{\max} = 2 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{l} \sqrt{l^2 - d^2} = 1,6. \quad (6)$$

6.3. Pe un plan înclinat se află un corp cu greutatea G . Asupra lui mai acționează alte două forțe, ca în figură, de valoare $G\sqrt{3}/3$. Să se afle unghiul planului, știind că corpul este în echilibru (fig. 6.3).

Soluție. Corpul este în echilibru dacă

$$G_t = \frac{G\sqrt{3}}{3} + \frac{G\sqrt{3}}{3} \cos \alpha \quad (1)$$

sau

$$G \sin \alpha = \frac{G\sqrt{3}}{3} (1 + \cos \alpha) \quad (2)$$

sau

$$3 \sin \alpha = \sqrt{3} (1 + \cos \alpha), \quad (3)$$

de aici

$$\alpha = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ. \quad (4)$$

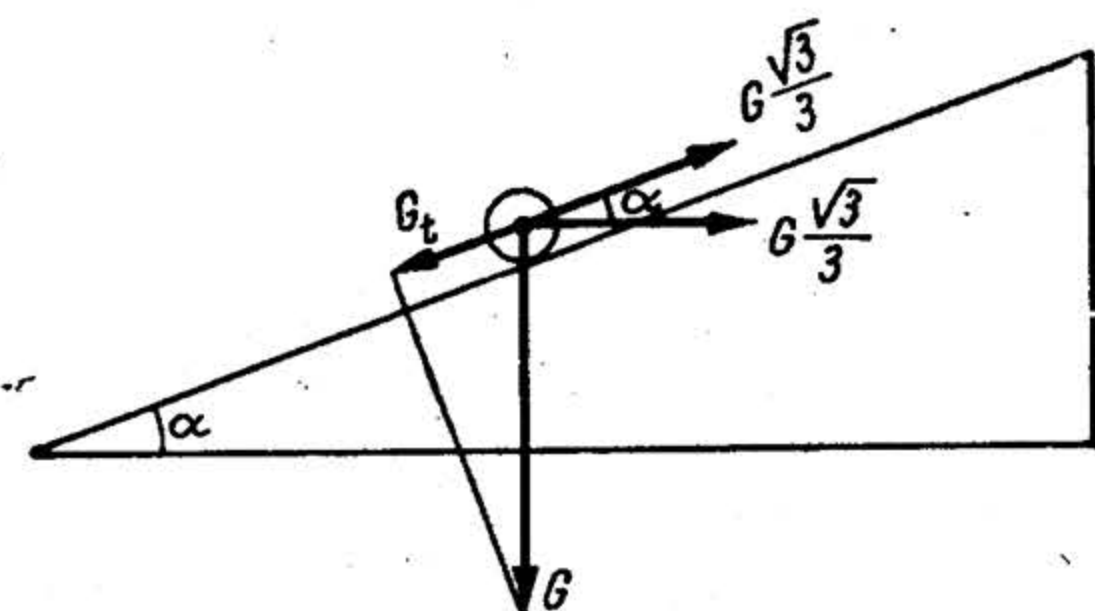


Fig. 6.3

6.4. Un corp cu greutatea G este așezat în echilibru pe o suprafață orizontală și este acționat de o forță F ce face unghiul α cu suprafața. Coeficientul de frecare este μ . Să se afle valoarea unghiului pentru care forța este minimă (fig. 6.4).

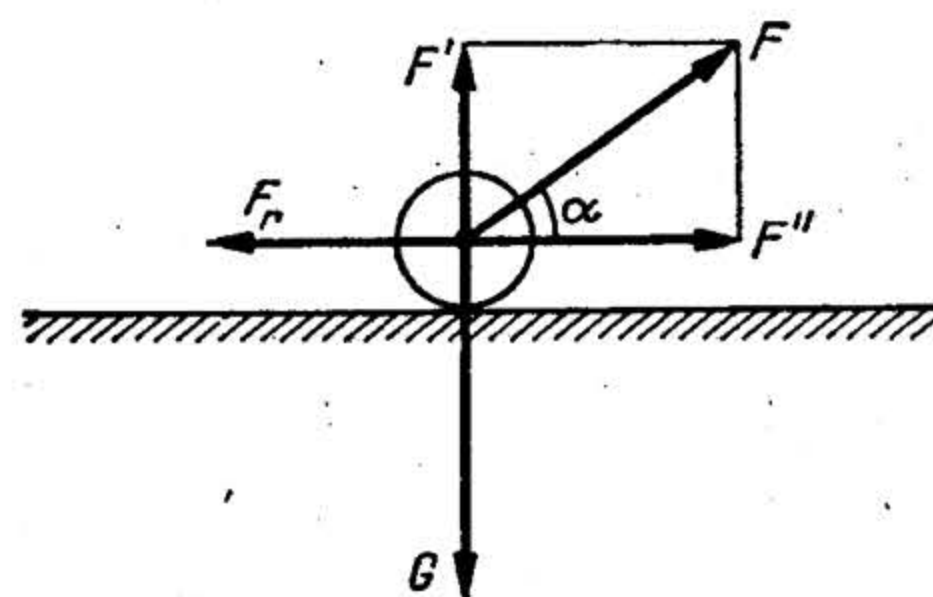


Fig. 6.4

Soluție. Se observă că

$$\begin{aligned} F' &= F \sin \alpha \\ F'' &= F \cos \alpha \\ F'' &\geq F_r \end{aligned} \quad (1)$$

Forța de frecare are valoarea $F_r = \mu(G - F') = \mu(G - F \sin \alpha)$ de unde

$$F = \frac{\mu G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}. \quad (2)$$

Prin derivare, avem

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{\mu G (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2}. \quad (3)$$

După anularea derivatei, găsim

$$[\alpha]_{F=F_{\min}} = \arctg \mu. \quad (4)$$

6.5. Într-un cerc cu diametrul $AB = 2r$ se duc coardele CD și EF care taie diametrul în M și N . Ce condiție îndeplinesc aceste puncte dacă rezultanta forțelor AC , AD , AE , AF este independentă de mărimea coardelor (fig. 6.5)?

Soluție. Se observă că

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \vec{AM} + \vec{MC} \\ \vec{F}_2 &= \vec{AM} + \vec{MD} \\ \vec{F}_3 &= \vec{AN} + \vec{NE} \\ \vec{F}_4 &= \vec{AN} + \vec{NF}. \end{aligned} \quad (1)$$

Dacă punctele M și N sînt simetrice față de O , atunci

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= \vec{NB} \\ \vec{MC} + \vec{MD} &= 0 \\ \vec{NE} + \vec{NF} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

deci

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = 2(\vec{AM} + \vec{AN}) = 2 \cdot 2r = 4r = 4\vec{AO}. \quad (3)$$

6.6. Un corp de greutate G , suspendat de un cablu rezistent, este deplasat din poziția de echilibru de o forță orizontală F . Tensiunea din cablu este T . Să se determine unghiul maxim de scoatere din poziția de echilibru și verticală, pentru situația cînd cablul rezistă solicitării (fig. 6.6).

Soluție. Tensiunea din cablu are componentele

$$\begin{aligned} T_1 &= T \cos \alpha \\ T_2 &= T \sin \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Corpul este în echilibru sub acțiunea forței date dacă

$$\begin{aligned} F &= T_2 \\ G &= T_1; \end{aligned} \quad (2)$$

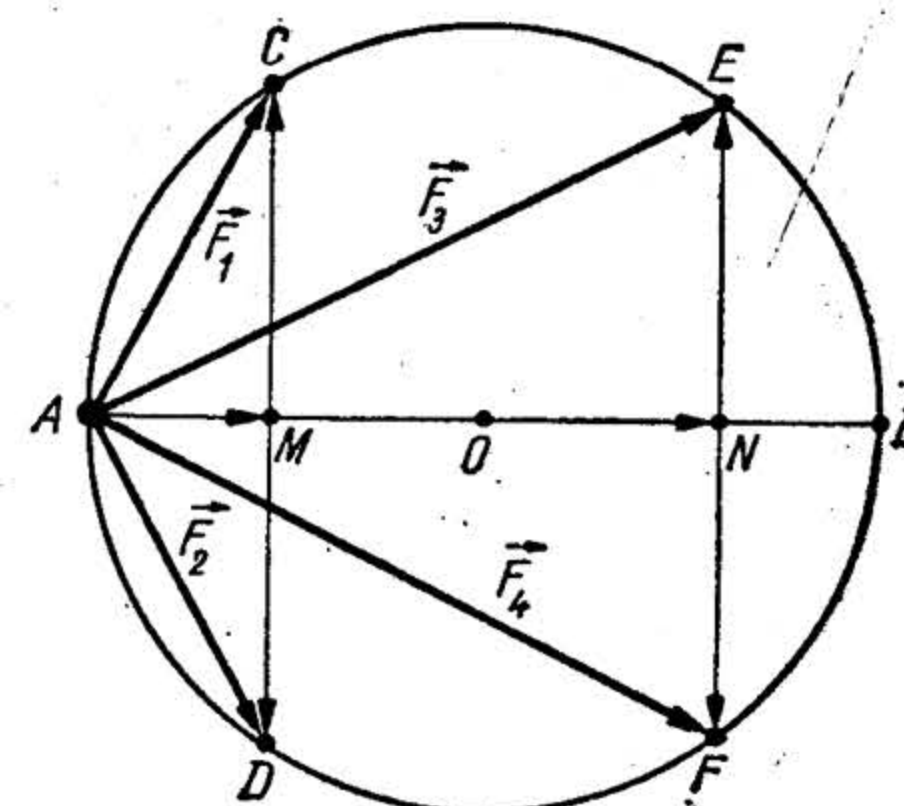


Fig. 6.5

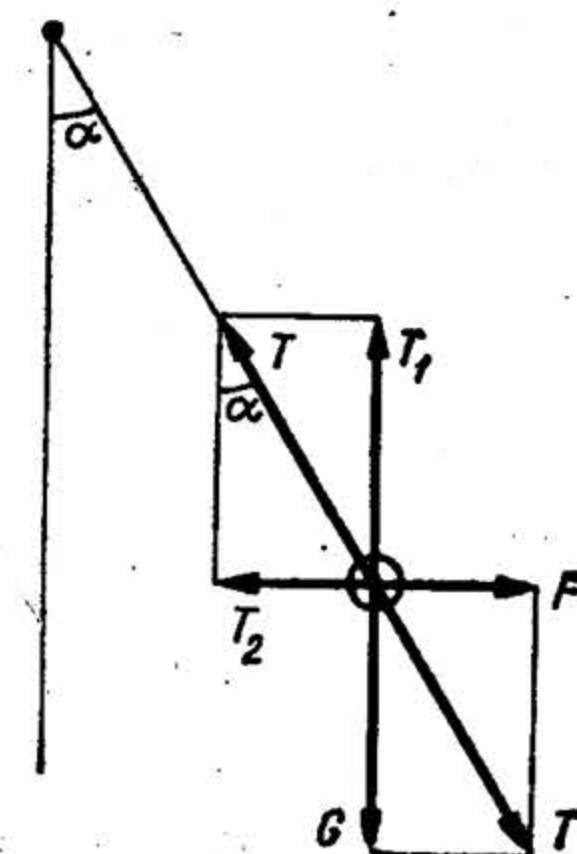


Fig. 6.6

de aici

$$\alpha_{\max} = \arcsin \frac{F}{T} = \arccos \frac{G}{T}. \quad (3)$$

Se mai verifică

$$G = \sqrt{T^2 - F^2}. \quad (4)$$

6.7. Un om cu masa de m_1 kg urcă pe o scară de m_2 kg, înclinată sub unghiul α față de verticală și de lungimea l (coeficientul de frecare dintre scară și pereți este μ). Care este distanța maximă pe care se poate urca omul pe scară, fără a exista pericolul de alunecare (fig. 6.7)?

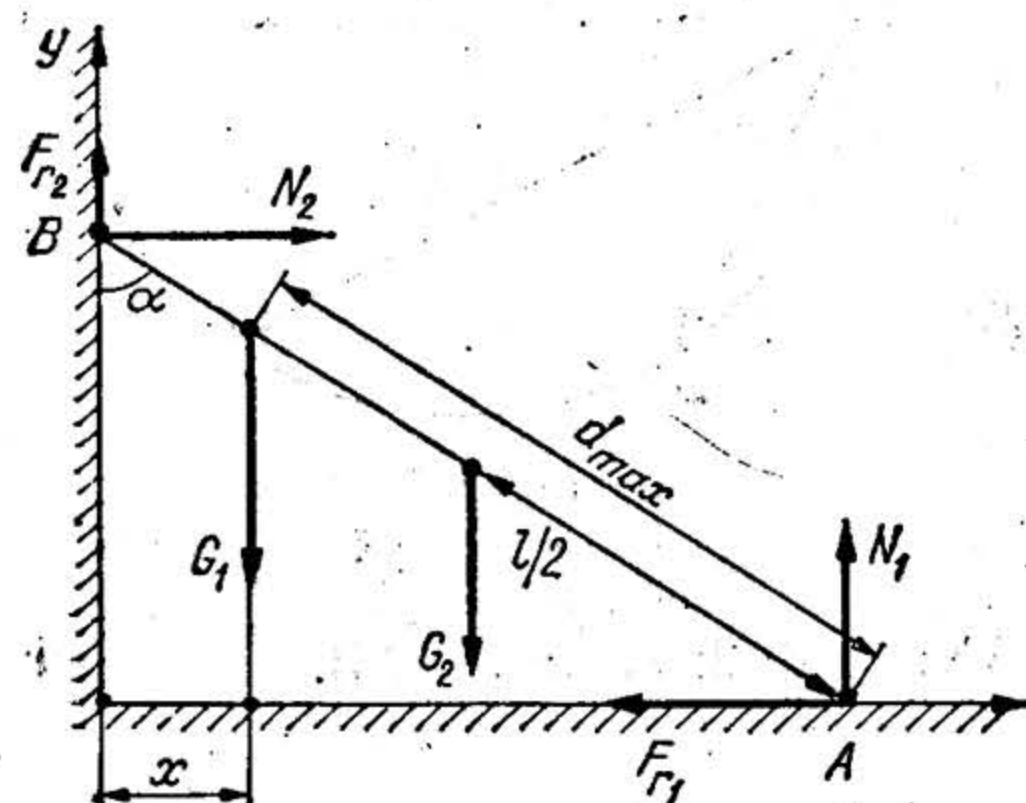


Fig. 6.7

Soluție. Se observă că

$$F_{r1} = \mu N_1 \quad (1)$$

$$F_{r2} = \mu N_2. \quad (2)$$

Sistemul este în echilibru dacă

$$\begin{aligned} N_2 - \mu N_1 &= 0 \\ \mu N_2 + N_1 - (m_1 + m_2)g &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

și dacă

$$\begin{aligned} M_0(N_1) + M_0(N_2) + \\ + M_0(G_1) + M_0(G_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

sau

$$N_1 l \sin \alpha = N_2 l \cos \alpha + m_2 g \frac{l}{2} + m_1 g x. \quad (5)$$

Din aceste relații avem

$$N_1 = \frac{m_1 + m_2}{1 + \mu^2} g \quad (6)$$

$$N_2 = \frac{m_1 + m_2}{1 + \mu^2} \mu g \quad (7)$$

$$x = \frac{l}{m_1} \left[\frac{m_1 + m_2}{1 + \mu^2} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \frac{m_2}{2} \sin \alpha \right] \quad (8)$$

$$d_{\max} = l \left[1 + \frac{m_2}{2m_1} - \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \frac{1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \mu^2} \right]. \quad (9)$$

6.8. Dintr-o placă omogenă dreptunghiulară $ABCD$ se taie o porțiune ADE . Se cunosc $DE = b$ și $DC = a$. Greutatea figurii rămase este G . Să se determine valoarea maximă a greutateii G_x , atârnată în punctul A pentru ca placa să nu se răstoarne, ea fiind așezată într-un plan vertical pe baza EC orizontală (fig. 6.8).

Soluție. Se adoptă notațiile: x — distanța centrului de greutate a figurii rămase față de AD , S_0 — suprafața inițială a plăcii, S_1 — suprafața tăiată (ADE), G_0 — greutatea inițială a plăcii, G_1 — greutatea porțiunii tăiate (ADE). Cu aceste notații avem

$$\begin{aligned} S_0 &= a \cdot AD \\ S_1 &= b \cdot \frac{AD}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Se consideră greutățile numeric egale cu suprafețele. Se observă că

$$G_0 = G + G_1 = G + \frac{b}{2} \cdot AD \quad (2)$$

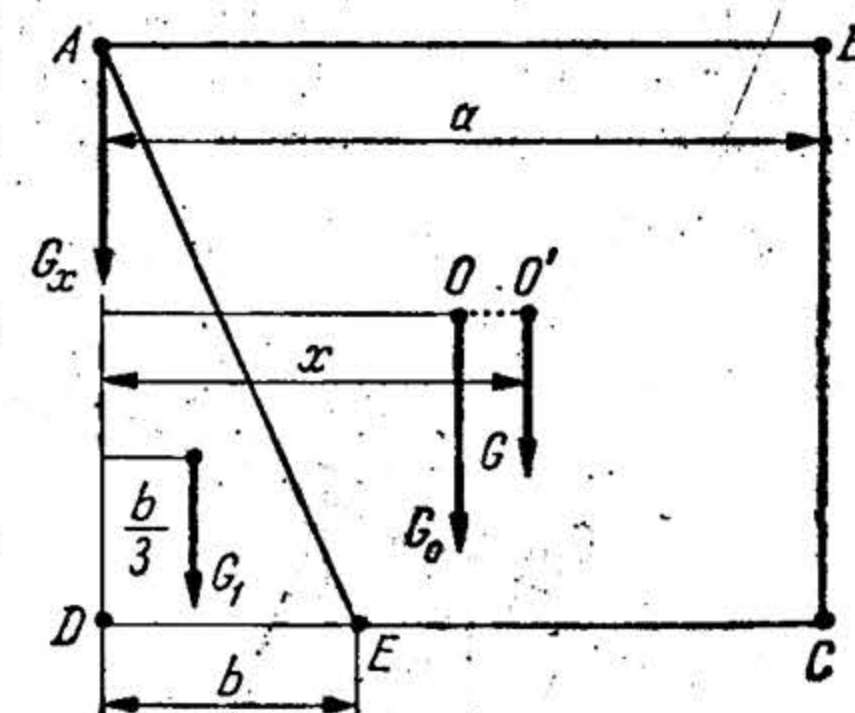


Fig. 6.8

de unde

$$AD = \frac{2G}{2a - b}. \quad (3)$$

Valorile lui G_1 și G_0 vor fi

$$G_1 = \frac{b}{2} AD = \frac{Gb}{2a - b} \quad (4)$$

$$G_0 = \frac{2aG}{2a - b}. \quad (5)$$

Pentru calculul greutateii G_x , vom folosi:

— egalitatea momentelor forțelor G , G_0 , G_1 față de punctul A sau D .

$$G_0 \frac{a}{2} = Gx + G_1 \cdot \frac{b}{3} \quad (6)$$

de unde

$$x = \frac{3a^2 - b^2}{3(2a - b)}. \quad (7)$$

— egalitatea momentelor forțelor G și G_x față de punctul B

$$G_x \cdot b = G(x - b) \quad (3)$$

de unde

$$G_x = \frac{3a^2 - 6ab + 2b^2}{3b(2a - 6)} G. \quad (9)$$

6.9. Pe un plan înclinat sub unghiul α se găsesc două corpuri (primul are masa m_1). Coeficienții de frecare sînt μ_1 și μ_2 , iar corpul al doilea se sprijină pe primul. Se cere valoarea *maximă* a masei corpului al doilea pentru care sistemul este în echilibru (fig. 6.9).

Soluție. Sistemul este în echilibru dacă

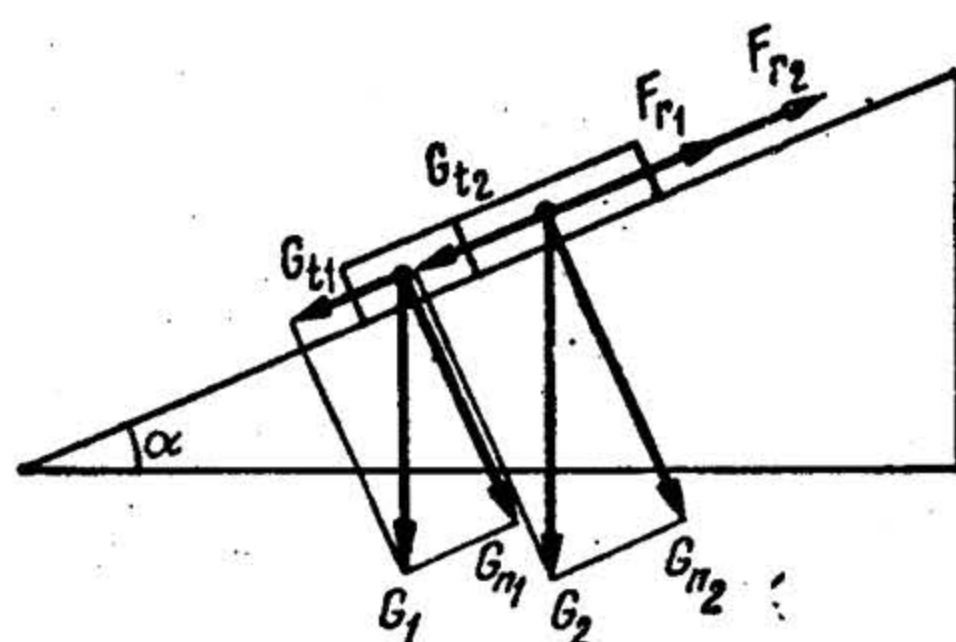


Fig. 6.9

$$G_{t1} + G_{t2} = F_{r1} + F_{r2} \quad (1)$$

unde

$$\begin{aligned} G_{t1} &= m_1 g \sin \alpha \\ G_{t2} &= m_2 g \sin \alpha \\ F_{r1} &= \mu_1 m_1 g \cos \alpha \\ F_{r2} &= \mu_2 m_2 g \cos \alpha; \end{aligned} \quad (2)$$

rezultă

$$m_{2 \max} = m_1 \frac{\mu_1 - \tan \alpha}{\tan \alpha - \mu_2}. \quad (3)$$

6.10. O bară cu lungimea l este acționată de două forțe F_1 și F_2 plasate ca în figură. Știind că unitatea de lungime din bară are greutatea $K(N)$, să se determine valoarea lui l pentru care F_2 este *minimă* și valoarea acestei forțe minime.

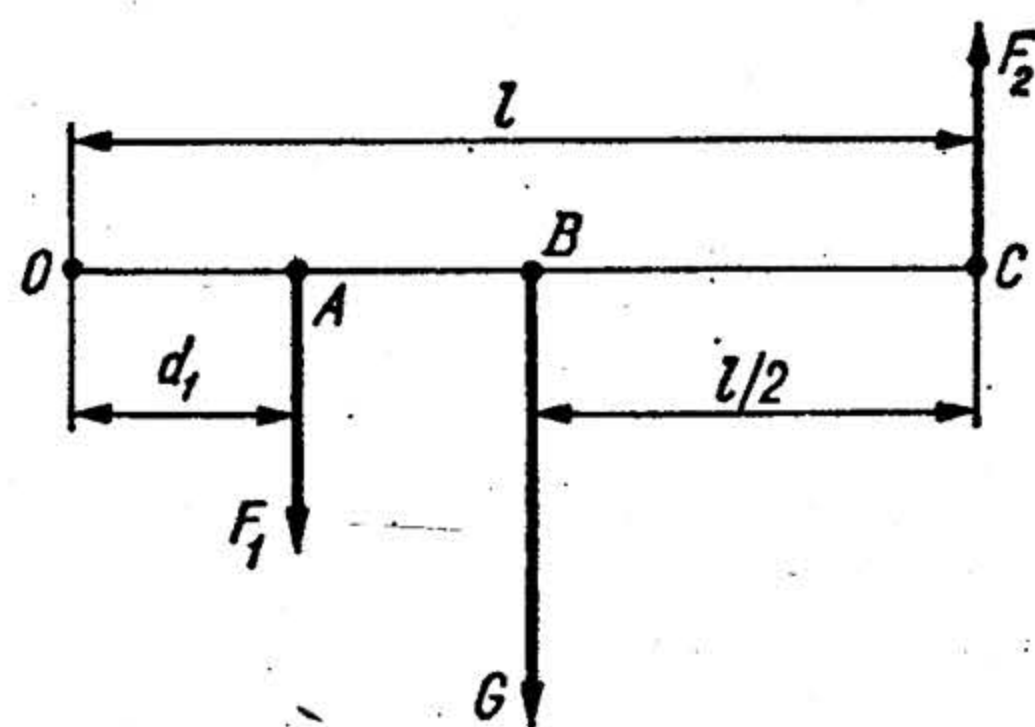


Fig. 6.10

Soluție. Din enunț, rezultă

$$G = kl. \quad (1)$$

Bara este în echilibru dacă

$$M_0(F_1) + M_0(G) = M_0(F_2) \quad (2)$$

sau

$$d_1 F_1 + \frac{kl^2}{2} = F_2 l \quad (3)$$

de unde

$$F_2 = \frac{2d_1 F_1 + kl^2}{2l}. \quad (4)$$

Avem

$$\frac{dF_2}{dl} = \frac{kl^2 - 2d_1 F_1}{4l^2}. \quad (5)$$

Din anularea derivatei avem

$$[l]_{F_2 = F_{2 \min}} = \sqrt{\frac{2d_1 F_1}{k}} \quad (6)$$

de unde

$$F_{2 \min} = \sqrt{2d_1 k F_1}. \quad (7)$$

6.11. O forță F trebuie să fie descompusă în două componente *perpendiculare* și care să se afle în raportul $F_1/F_2 = k_1/k_2$. Să se afle modulele acestor componente.

Soluție. Din relațiile

$$F_1^2 + F_2^2 = F^2 \quad (1)$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{k_1}{k_2} \quad (2)$$

deducem

$$F_1 = \frac{k_1 F}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \quad (3)$$

$$F_2 = \frac{k_2 F}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \quad (4)$$

6.12. Trei forțe coplanare $F_1 = F_2 = F_3 = F$ formează unghiurile $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha$. Între ce limite este cuprinsă rezultanta acestor forțe dacă unghiul este variabil (fig. 6.12)?

Soluție. Din enunț, rezultă că forțele F_1 și F_3 sînt simetrice față de F_2 . Rezultanta forțelor extreme e dirijată după direcția celei mijlocii și are modulul

$$R_{13} = \sqrt{F_1^2 + F_3^2 + 2F_1 F_3 \cos 2\alpha} = 2F \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \quad (1)$$

sau

$$R_{13} = 2F \cos \alpha. \quad (2)$$

Rezultanta finală va fi

$$R = R_{13} + F_2 = F(1 + 2 \cos \alpha). \quad (3)$$

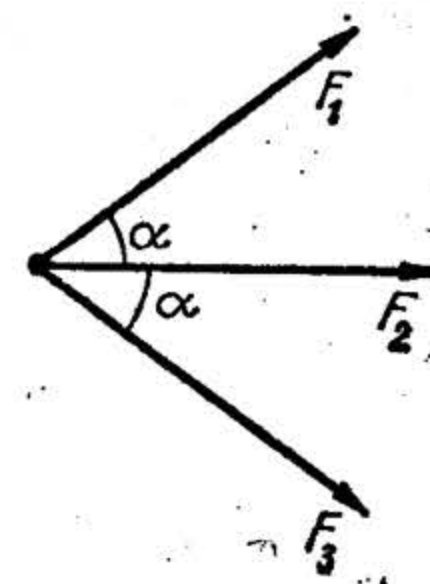


Fig. 6.12

Dacă

$$a) \alpha = 0 \Rightarrow R = R_{\max} = 3F \quad (4)$$

$$b) \alpha = \pi \Rightarrow R = R_{\min} = -F. \quad (5)$$

6.13. Un butuc cilindric de rază R trebuie trecut peste o treaptă de o anumită înălțime (fig. 6.13), acționând cu o forță egală cu greutatea corpului cilindric. Să se afle înălțimea maximă a treptei.

Soluție. E necesar ca

$$M_A(F) \geq M_A(G) \quad (1)$$

sau

$$F \cdot AC \geq G \cdot AB \quad (2)$$

sau

$$R - h \geq \sqrt{R^2 - (R - h)^2} \quad (3)$$

de unde

$$2h^2 - 4Rh + R^2 = 0. \quad (4)$$

Rezultă

$$h_{\max} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) R. \quad (5)$$

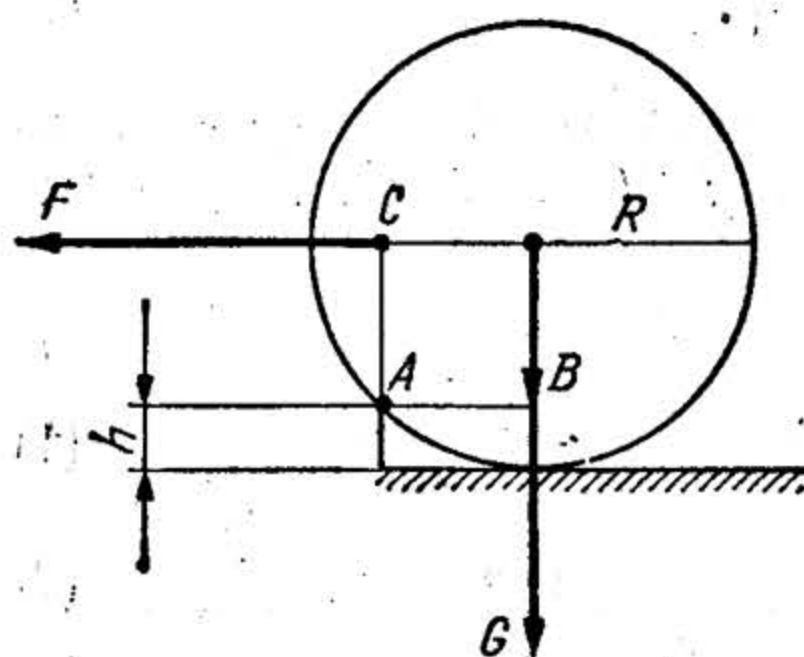


Fig. 6.13

6.14. Un corp de greutate G este suspendat pe un fir trecut peste doi scripeți ficși. La capetele firului acționează greutatea G_1 și G_2 (fig. 6.14). Care sînt condițiile de echilibru ale corpului pe care le îndeplinesc cele trei greutăți?

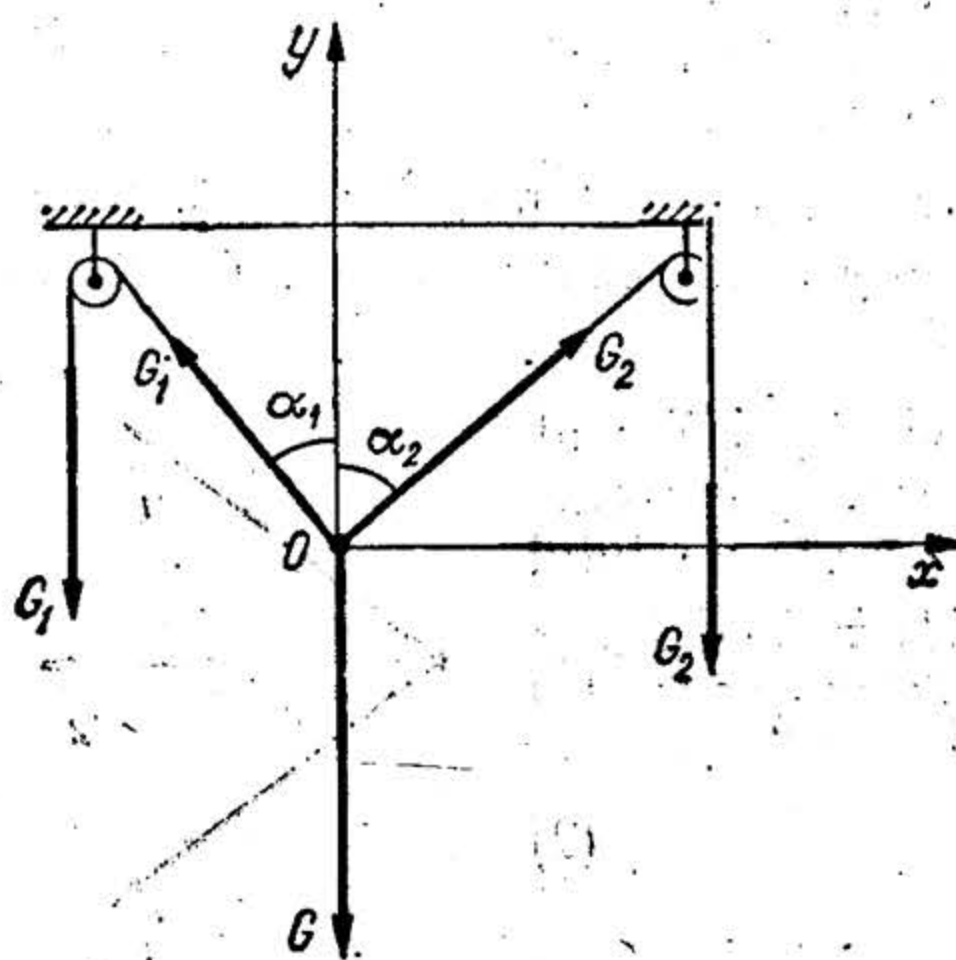


Fig. 6.14

Soluție. Corpul este în echilibru dacă avem

$$\begin{aligned} -G_1 \sin \alpha_1 + G_2 \sin \alpha_2 &= 0 \\ G - G_1 \cos \alpha_1 - G_2 \cos \alpha_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Observînd că

$$\sin \alpha_1 = \frac{G_2}{G_1} \sin \alpha_2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1} = \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{G_2}{G_1}\right)^2 \sin^2 \alpha_2} \end{aligned} \quad (3)$$

se obține în final

$$G^2 - 2G_1G_2 \cos \alpha_2 + G_2^2(\sin^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2) - G_1^2 = 0 \quad (4)$$

de unde

$$\alpha_2 = \arccos \frac{G^2 + G_2^2 - G_1^2}{2G_1G_2} \quad (5)$$

și

$$\alpha_1 = \arccos \frac{G^2 + G_1^2 - G_2^2}{2G_1G_2} \quad (6)$$

Deoarece $0 < \alpha_1 < 90^\circ$ și $0 < \alpha_2 < 90^\circ$ revine că trebuie îndeplinite condițiile

$$0 < \frac{G^2 + G_1^2 - G_2^2}{2G_1G_2} < 1 \quad (7)$$

$$0 < \frac{G^2 + G_2^2 - G_1^2}{2G_1G_2} < 1. \quad (8)$$

6.15. Un corp de masă m se află pe un plan înclinat sub unghiul α . Asupra lui acționează, succesiv, forțele F_1 și F_2 dirijate ca în figură. Coeficientul de frecare dintre corp și plan este μ . Se cer condițiile de echilibru ale corpului în cele două situații.

Soluție. Considerînd prima forță, avem două situații:

a) Corpul tinde să urce pe plan. Frecarea e dirijată spre baza planului și are valoarea

$$F_r \leq \mu N. \quad (1)$$

Ecuatiile de echilibru vor fi scrise pentru un sistem de axe dirijat ca în fig. 6.15, a). Avem

$$F_1 \cos \alpha - mg \sin \alpha - F_r = 0 \quad (2)$$

$$N - mg \cos \alpha - F_1 \sin \alpha = 0. \quad (3)$$

Ținînd cont de (1), rezultă

$$F_1 \leq mg \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \quad (4)$$

care este condiția ca corpul să nu urce pe plan.

b) Corpul tinde să coboare pe plan. Frecarea e dirijată spre vârful planului. Ecuațiile de echilibru vor fi (fig. 6.15, b)

$$F_1 \cos \alpha - mg \sin \alpha + F_r = 0 \quad (5)$$

$$N - mg \cos \alpha - F_1 \sin \alpha = 0. \quad (6)$$

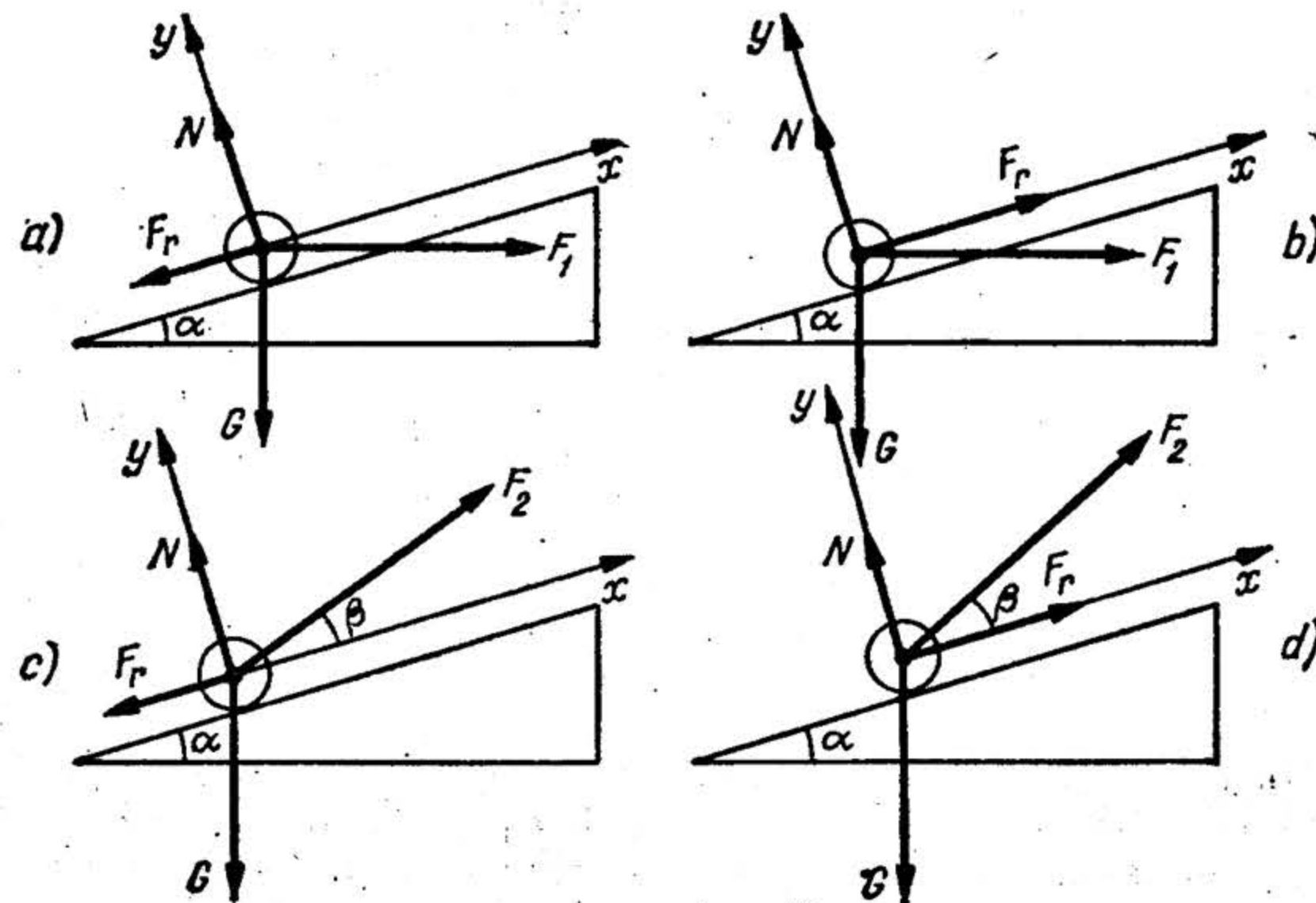


Fig. 6.15

Rezultă

$$F_1 \geq mg \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \quad (7)$$

care este condiția ca corpul să nu coboare pe plan.

Corpul este în echilibru dacă condițiile (4) și (7) sunt îndeplinite simultan, adică dacă

$$mg \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \leq F_1 \leq mg \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}. \quad (8)$$

Considerând a doua forță deosebim două cazuri:

a) Corpul tinde să urce pe plan. Avem (fig. 6.15, c)

$$F_r \leq \mu N. \quad (9)$$

Ecuațiile de echilibru vor fi

$$F_2 \cos \beta - mg \sin \alpha - F_r = 0 \quad (10)$$

$$F_2 \sin \beta + N - mg \cos \alpha = 0 \quad (11)$$

de unde se deduce

$$F_2 \leq mg \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta}. \quad (12)$$

b) Corpul tinde să coboare pe plan. În acest caz, avem (fig. 6.15, d)

$$F_2 \cos \beta - mg \sin \alpha + F_r = 0 \quad (13)$$

$$F_2 \sin \beta + N - mg \cos \alpha = 0 \quad (14)$$

de unde

$$F_2 \geq mg \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \beta - \mu \sin \beta}. \quad (15)$$

Corpul rămâne în echilibru dacă sunt îndeplinite simultan condițiile (12) și (15).

6.16. Un cub de masă m poate fi răsturnat în jurul muchiei drepte a bazei inferioare (fig. 6.16) prin acțiunea unei forțe oarecare. Se cere:

a) valoarea forței minime de răsturnare;

b) valoarea cea mai mică a coeficientului de frecare dintre cub și suprafața orizontală (corespunzător punctului a).

Soluție. a) Forța cerută trebuie să acționeze perpendicular pe segmentul OA (care unește mijloacele muchiei în jurul căreia e posibilă răsturnarea cu opusa ei din baza superioară).

Corpul rămâne însă în echilibru dacă

$$M_o(F) = M_o(G) \quad (1)$$

unde G este greutatea cubului de muchie arbitrară a . Avem

$$M_o(F) = F \cdot AO = F \cdot a \sqrt{2} \quad (2)$$

$$M_o(G) = G \cdot CB = mg \cdot \frac{a}{2}. \quad (3)$$

Din (1), (2), (3) rezultă

$$F_{min} = \frac{mg \sqrt{2}}{4}. \quad (4)$$

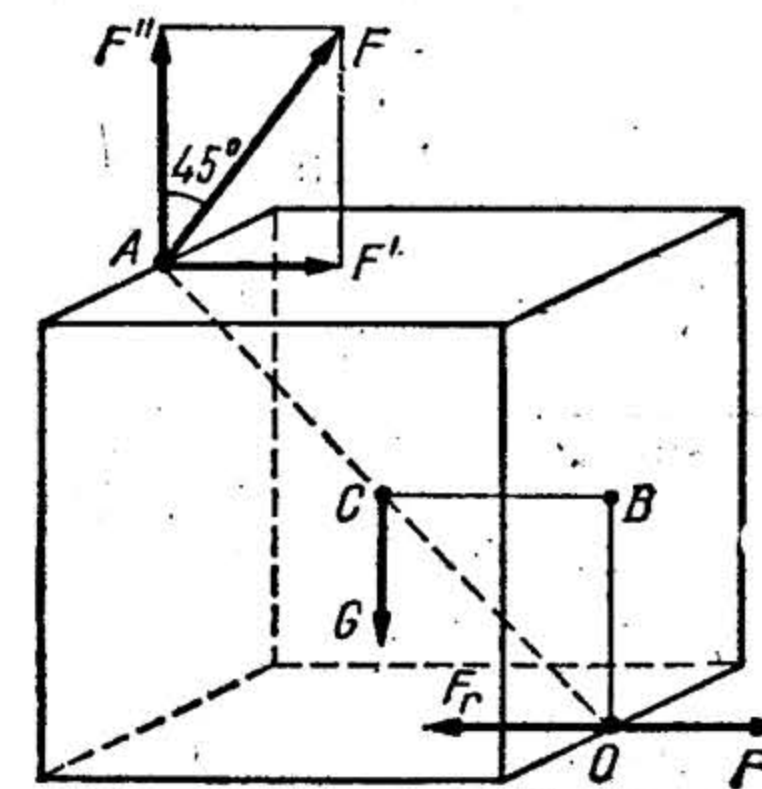


Fig. 6.16

Pentru împiedicarea alunecării cubului este necesar ca

$$F_r \geq F' \quad (5)$$

sau

$$\mu_{\min} \left(mg - \frac{F\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{F\sqrt{2}}{2} \quad (6)$$

de unde

$$\mu_{\min} = \frac{1}{3}. \quad (7)$$

6.17. Un tablou este prins de perete printr-o sfoară de lungime l care face un unghi α cu peretele vertical de susținere (fig. 6.17).

Înălțimea tabloului este d , partea sa inferioară sprijinindu-se nefixat pe perete. Să se afle valoarea minimă a coeficientului de frecare dintre tablou și perete pentru ca aceasta să rămână în echilibru.

Soluție. Condiția de echilibru, relativă la componentele forțelor, se scrie

$$G = F_r + T \cos \alpha \quad (1)$$

$$N = T \sin \alpha$$

$$F_r = \mu N \quad (2)$$

Egalitatea momentelor forțelor față de punctul B se scrie

$$\frac{Gl \sin \alpha}{2} = T(l \cos \alpha + \sqrt{d^2 - l^2 \sin^2 \alpha}) \sin \alpha \quad (3)$$

Avem

$$\frac{F_r}{N} = \frac{l \cos \alpha + 2 \sqrt{d^2 - l^2 \sin^2 \alpha}}{l \sin \alpha} \quad (4)$$

de unde

$$\mu_{\min} = \frac{l \cos \alpha + 2 \sqrt{d^2 - l^2 \sin^2 \alpha}}{l \sin \alpha} \quad (5)$$

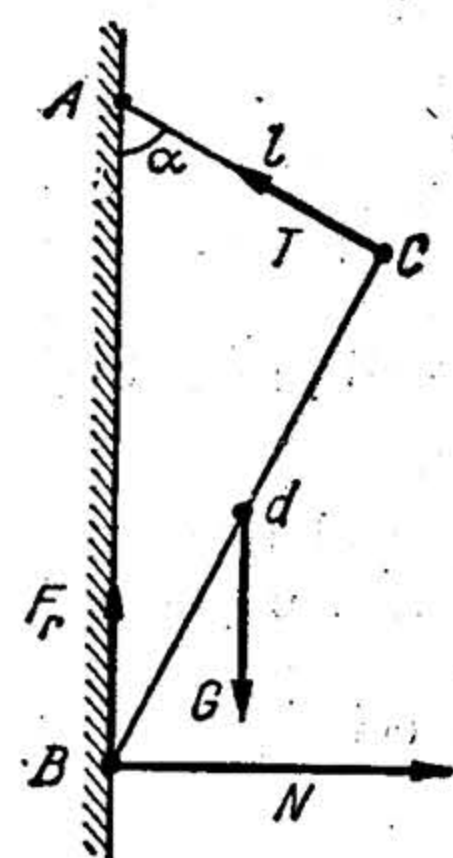


Fig. 6.17

VII. MECANICA FLUIDELOR

7.1. O minge cu masa m și volumul V este fixată la o anumită adâncime sub apă (densitatea ρ). Lăsată liberă mingea se deplasează timp de t_1 secunde prin apă, după care iese la suprafață. Să se afle înălțimea maximă atinsă în raport cu nivelul apei și timpul total de mișcare (fig. 7.1).

Soluție. Deoarece mingea urcă prin apă, rezultă că forța ascensională $F_a = G_{\text{disl}} - G_{\text{corp}} = ma$ reprezintă și forța acceleratoare. Avem

$$G_{\text{disl}} = V\rho g \quad (1)$$

$$G_{\text{corp}} = mg \quad (2)$$

de unde

$$a = \frac{g(V\rho - m)}{m} \quad (3)$$

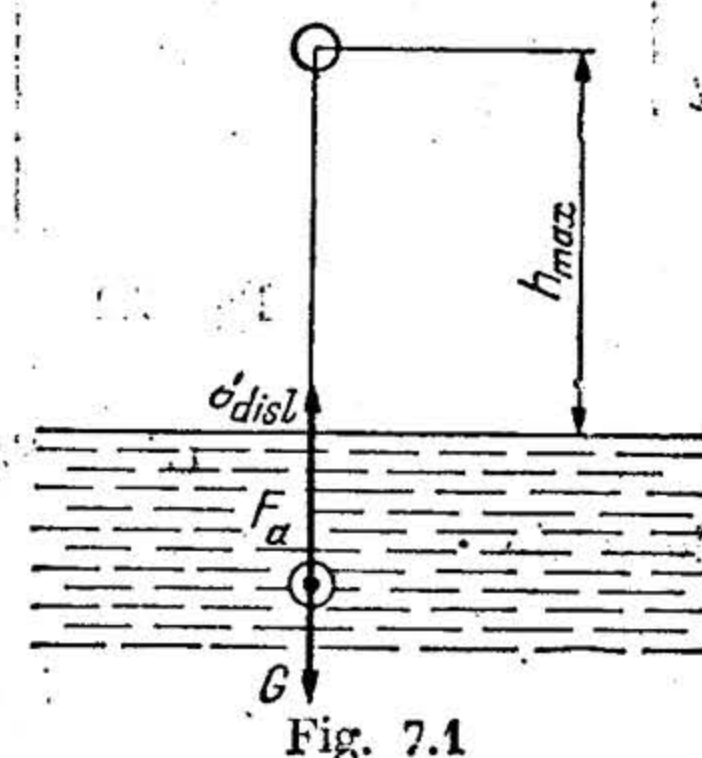


Fig. 7.1

Viteza după timpul t_1 este viteza inițială pentru porțiunea aeriană a mișcării

$$v_0 = at_1 = \frac{gt_1(V\rho - m)}{m} \quad (4)$$

Înălțimea maximă atinsă de corp va fi

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{gt_1^2(V\rho - m)^2}{2m^2} \quad (5)$$

Timpul de urcare este

$$t_u = \frac{v_0}{g} = \frac{t_1(V\rho - m)}{m} \quad (6)$$

Timpul total de mișcare va fi

$$t = t_1 + t_u = \frac{v_0 t_1}{m} \quad (7)$$

7.2. Un corp cilindric cu secțiunea S , înălțimea h și densitatea ρ este atârnat la unul din capetele unei balanțe cu brațele egale, printr-un fir de greutate neglijabilă. La celălalt capăt se așază o greutate G' , constatându-se că cilindrul este mai greu. Pentru echilibrare, cilindrul începe să fie introdus într-un lichid de densitate ρ_1 . Să se afle adâncimea de scufundare la obținerea echilibrului (fig. 7.2).

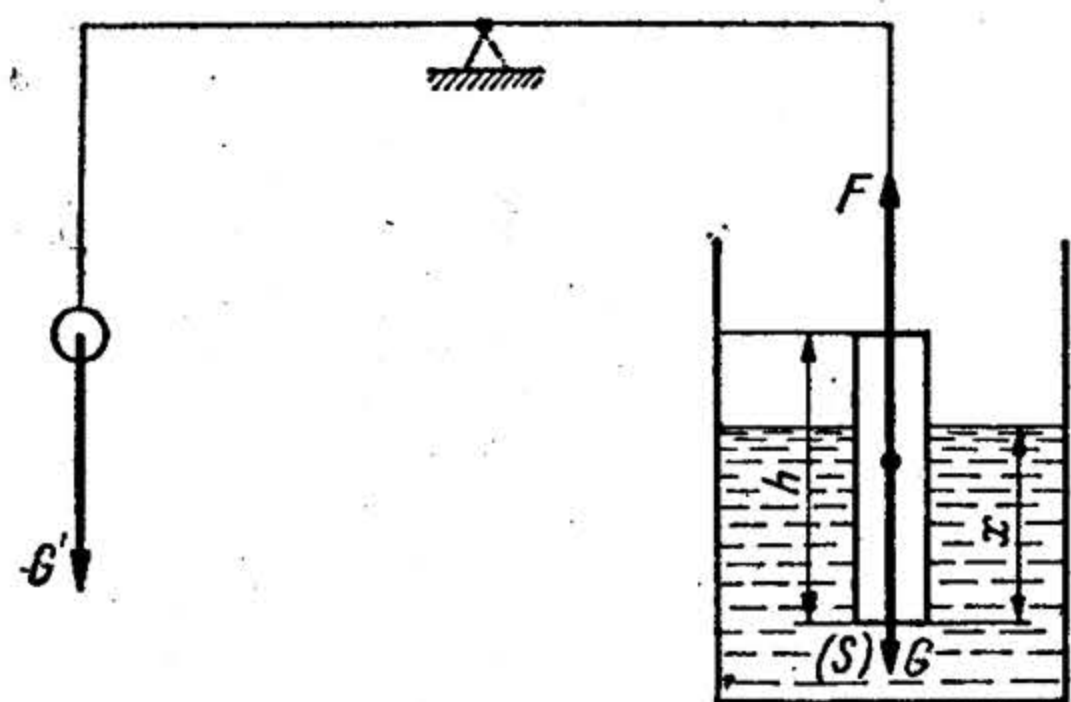


Fig. 7.2

Soluție. Echilibrul se obține dacă

$$G' = G - F \quad (1)$$

unde G este greutatea corpului, iar F forța arhimedică. Deoarece

$$G = mg = Sh\rho g \quad (2)$$

$$F = G_{\text{disl}} = m_{\text{disl}} \cdot g = Sx\rho_1 g \quad (3)$$

rezultă

$$G' = Sh\rho g - F = Sh\rho g - Sx\rho_1 g \quad (4)$$

de unde

$$x = \frac{Sh\rho g - G'}{S\rho_1 g} \quad (5)$$

7.3. Se dau două corpuri identice (de densitate ρ) aflate la aceeași adâncime într-un lichid (de densitate $\rho_1 > \rho$). Corpurile sunt lansate în același moment pe verticală, cu aceeași viteză inițială v_0 , dar în sensuri contrare (primul în sus). Să se afle adâncimea inițială dacă corpurile ating suprafața liberă a lichidului în același moment (primul venind de sus) (fig. 7.3).

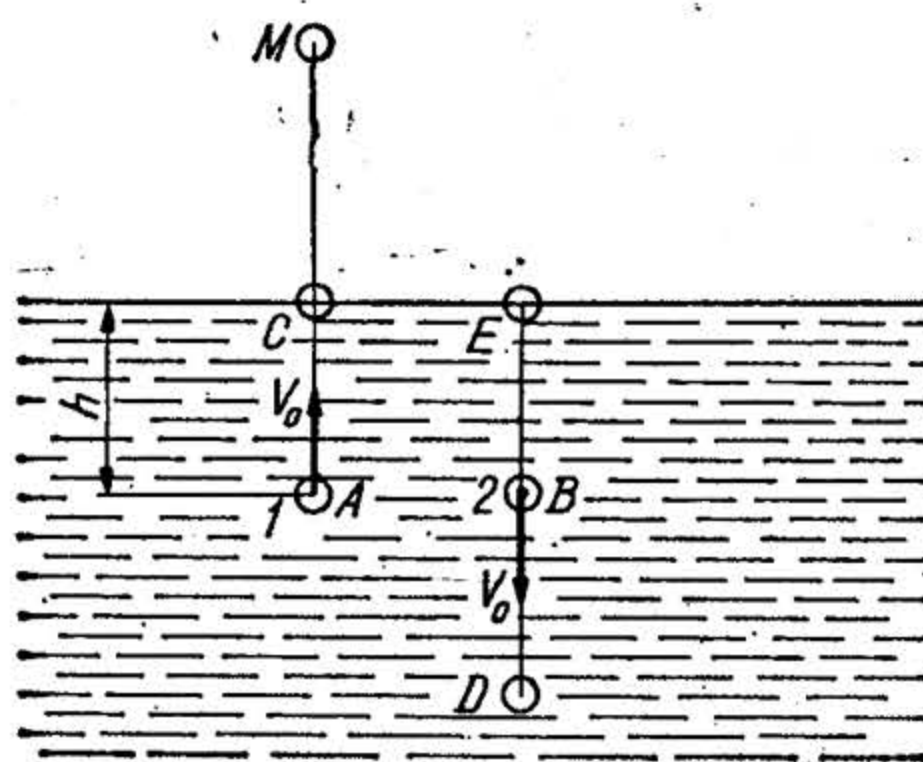


Fig. 7.3

Soluție. Condiția din problemă implică egalitatea timpilor de mișcare ai celor două corpuri.

Accelerația celor două corpuri are valoarea

$$a = a_1 = a_2 = g \left(\frac{\rho_1}{\rho} - 1 \right) \quad (1)$$

Timpul de mișcare al primului corp este

$$t_1 = t_{AC} + 2t_{CM} \quad (2)$$

Observând că viteza primului corp în punctul C este

$$v_C = \sqrt{v_0^2 + 2ah} \quad (3)$$

și că punctul M este punct culminant, avem

$$t_1 = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2ah} - v_0}{a} + \frac{2\sqrt{v_0^2 + 2ah}}{g} \quad (4)$$

Timpul de mișcare al celui de al doilea corp este

$$t_2 = t_{BD} + t_{DE} \quad (5)$$

Observând că punctul D este punctul de adâncime maximă (unde al doilea mobil se oprește un moment), avem

$$t_{BD} = \frac{v_0}{a} \quad (6)$$

$$BD = \frac{v_0^2}{2a} \quad (7)$$

Deci

$$t_2 = \frac{v_0}{a} + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2ah}}{a} \quad (8)$$

Din egalitatea celor doi timpi avem

$$h = \frac{v_0^2(g^2 - a^2)}{2a^3} = k \cdot \frac{v_0^2}{2g} \quad (9)$$

unde

$$k = \frac{\frac{\rho_1}{\rho} \left(2 - \frac{\rho_1}{\rho} \right)}{\left(\frac{\rho_1}{\rho} - 1 \right)^3} \quad (10)$$

7.4. O sferă, goală în interior, are pereții confecționați dintr-o substanță cu densitatea ρ_1 . Razele pereților sînt R_1 și R_2 ($R_1 > R_2$). Cu ce fel de material este umplută sfera dacă ea plutește într-un lichid cu densitatea ρ_2 , fiind complet scufundată în acesta (fig. 7.4)?

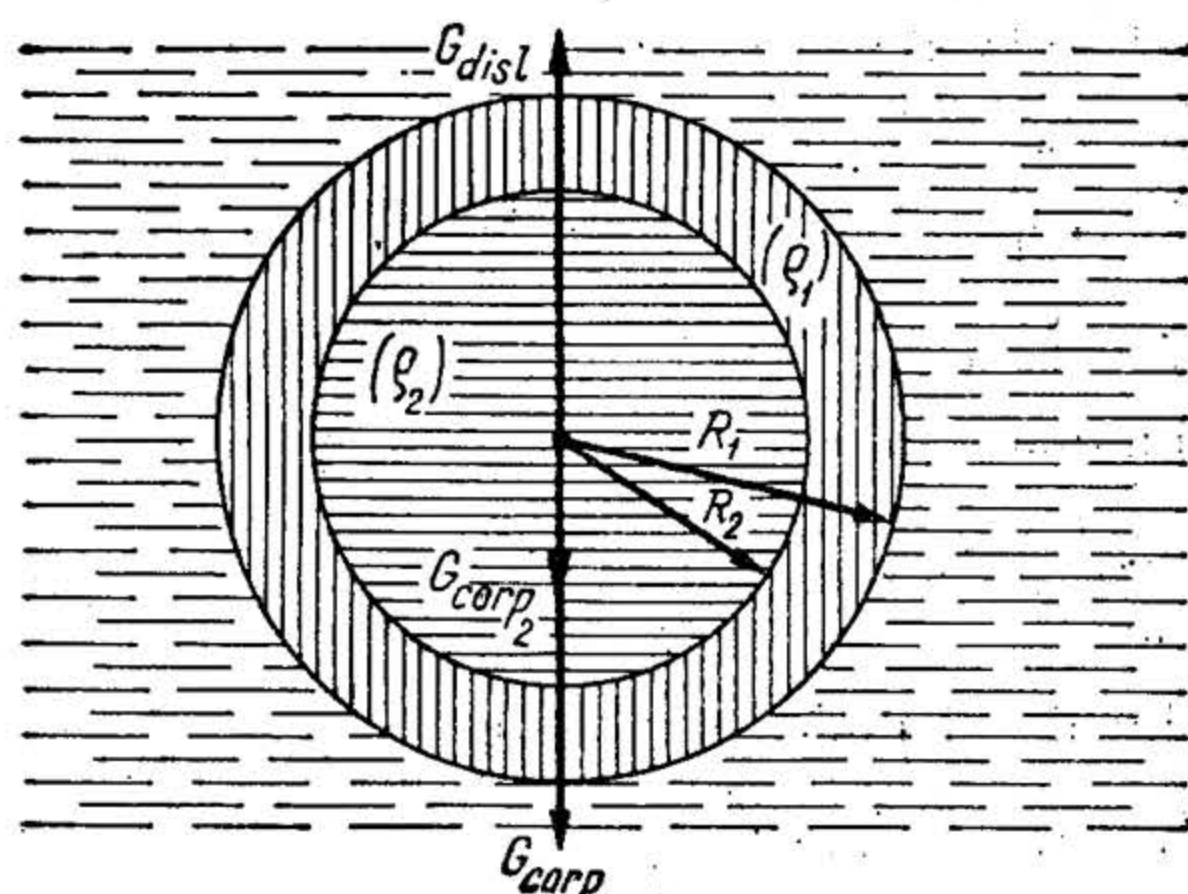


Fig. 7.4

Soluție. Greutatea dislocuită de sferă este

$$G_{disl} = V_{corp} \cdot \rho_2 g = \frac{4\pi R_1^3}{3} \rho_2 g \quad (1)$$

Greutatea sferei este formată din greutatea peretilor

$$G_{corp1} = \frac{4\pi}{3} \rho_1 g (R_1^3 - R_2^3) \quad (2)$$

și a materialului de umplere

$$G_{corp2} = \frac{4\pi R_2^3}{3} \rho g \quad (3)$$

Din condiția de echilibru a sferei în interiorul lichidului avem

$$G_{disl} = G_{corp1} + G_{corp2} \quad (4)$$

sau

$$R_1^3 \rho_2 = R_2^3 \rho + \rho_1 (R_1^3 - R_2^3) \quad (5)$$

de unde densitatea ρ a materialului de umplere este

$$\rho = \frac{R_1^3 (\rho_2 - \rho_1) + \rho_1 R_2^3}{R_2^3} \quad (6)$$

7.5. Două bile cu razele R_1 și R_2 ($R_1 > R_2$) și cu densitățile ρ_1 și ρ_2 ($\rho_1 > \rho_2$) sînt fixate la capetele unei bare de lungime d și de greutate neglijabilă și complet scufundate într-un lichid de densitate $\rho < \rho_2$. Să se afle poziția de suspensie a barei pentru situația de echilibru a sistemului de corpuri în lichid (fig. 7.5).



Fig. 7.5

Soluție. Greutățile aparente ale celor două sfere vor fi

$$G_{a1} = \frac{4\pi R_1^3}{3} (\rho_1 - \rho) g \quad (1)$$

$$G_{a2} = \frac{4\pi R_2^3}{3} (\rho_2 - \rho) g \quad (2)$$

Momentele greutateilor aparente față de punctul de suspensie vor fi

$$M_1 = \frac{4\pi R_1^3}{3} d_1 (\rho_1 - \rho) g \quad (3)$$

$$M_2 = \frac{4\pi R_2^3}{3} (\rho_2 - \rho) (d - d_1) g \quad (4)$$

Din egalitatea lor se deduce

$$d_1 = d \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho + (\rho_1 - \rho) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3} \quad (5)$$

7.6. Se dă un vas cu fundul mobil, de arie S , în care se toarnă un lichid (densitate ρ) pînă la înălțimea h . Pe suprafața liberă a lichidului se atașează un piston etanș (de masă neglijabilă) pe care se așează un corp de masă m_1 . Fundul vasului este susținut printr-un sistem de pîrghii (fig. 7.6). Se cere valoarea minimă a masei corpului de pe taler pentru ca lichidul să nu curgă.

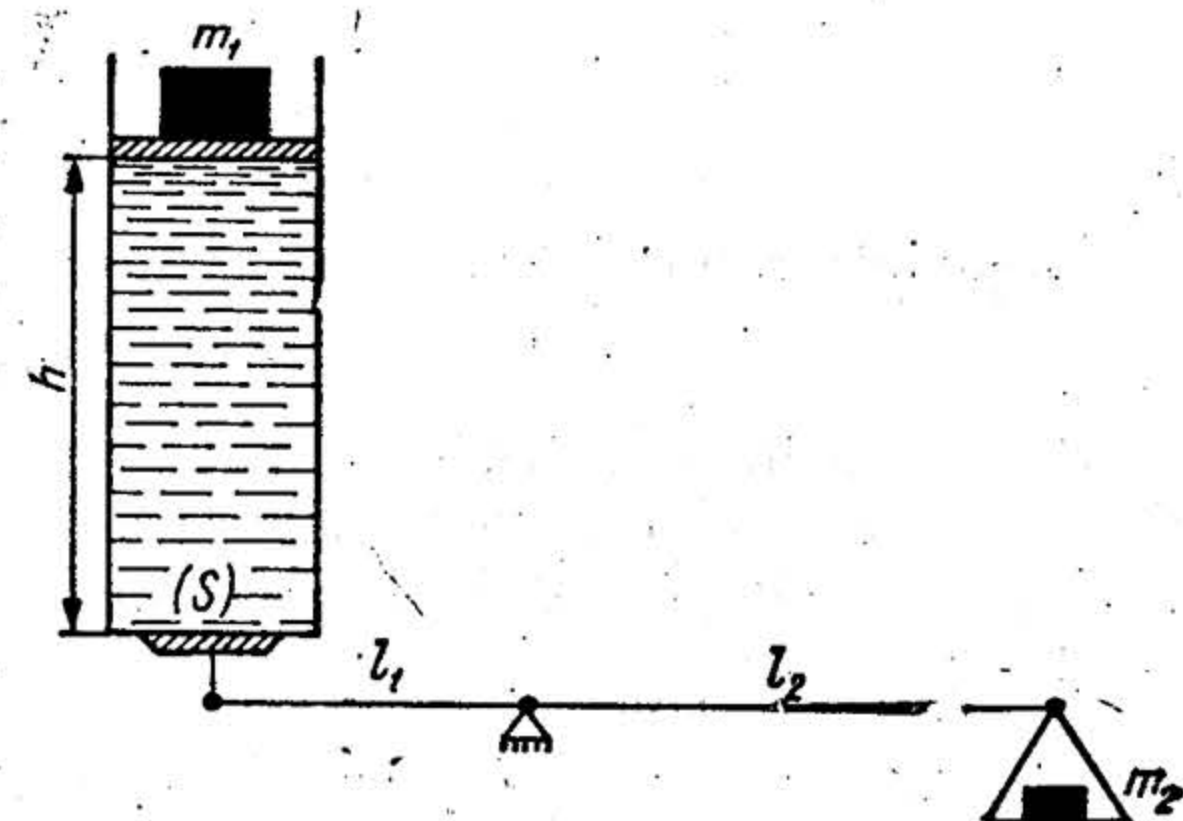


Fig. 7.6

Soluție. Greutatea primului corp și forța de presiune hidrostatică a lichidului, au împreună valoarea

$$G' = m_1 g + h \rho g S \quad (1)$$

La echilibru este îndeplinită condiția

$$G' l_1 = G_2 l_2 \quad (2)$$

sau

$$(m_1 g + h \rho g S) l_1 = m_2 g l_2 \quad (3)$$

de unde

$$(m_2)_{min} = (m_1 + h \rho S) \frac{l_1}{l_2} \quad (4)$$

7.7. Se dă vasul din figură care are o spărtură dreptunghiulară pe fund. Aria fundului vasului (inclusiv a spărturii) este S . Cu ce forță trebuie deplasat vasul (a cărui masă, exclusiv lichidul, este M) pentru ca în el să rămână o cantitate de lichid (densitatea ρ) cât mai mare (fig. 7.7)?

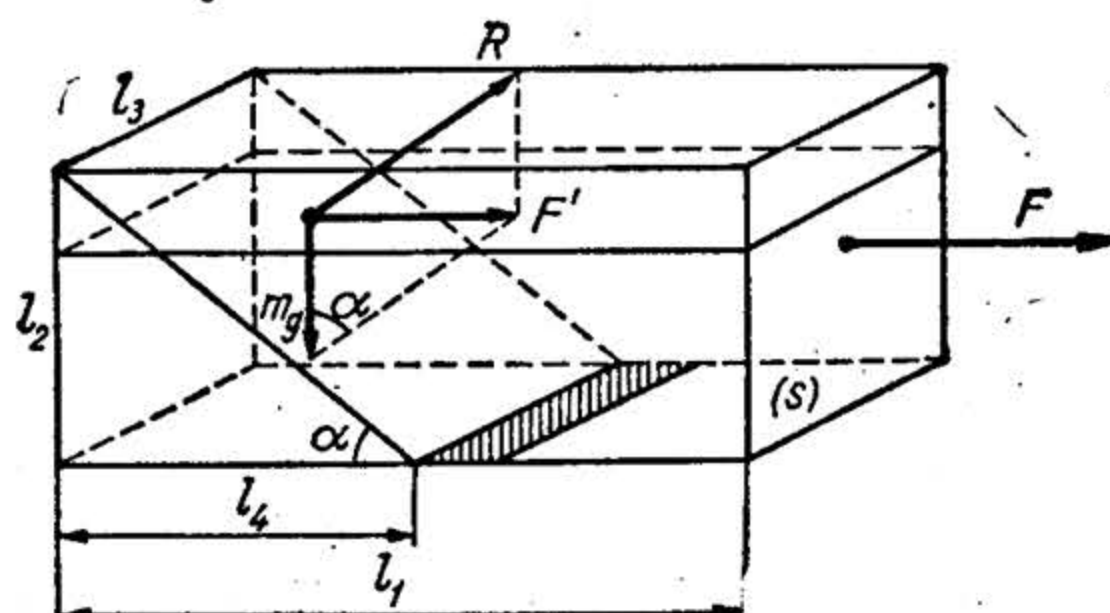


Fig. 7.7

Soluție. În vas rămâne o masă maximă de lichid dacă suprafața liberă a acestuia devine (în urma deplasării vasului) o față laterală a prisme cu laturile l_4 , l_2 , $l_3 = S/l_1$.

Volumul acestei prisme este

$$V = l_2 l_4 S / 2 l_1 \quad (1)$$

iar masa de lichid îngrămadită în acest spațiu este

$$m = V \rho = \frac{l_2 l_4 S \rho}{2 l_1} \quad (2)$$

Masa întregului sistem va fi

$$m' = M + m. \quad (3)$$

Suprafața liberă a lichidului rămâne în poziția amintită dacă forța de acțiune F' este rezultanta greutateii lichidului și reacțiunii normale pe suprafață, fiind dirijată după orizontală.

Se observă că

$$F' = mg \tan \alpha = mg \frac{l_2}{l_4} \quad (4)$$

iar conform legii a doua a dinamicii

$$F = m'a = g \frac{l_2}{l_4} \left(M + \frac{l_2 l_4 S \rho}{2 l_1} \right) \quad (5)$$

care este forța cerută de problemă.

7.8. Un vas este plin cu apă. Debitul de volum este constant și egal Q_v . Pe peretele lateral se practică două orificii de arie A fiecare, aflate la distanța d unul față de altul. Să se afle coordonatele punctului de intersecție a jeturilor de lichid care ies prin cele două găuri (fig. 7.8).

Soluție. Conform ecuației lui Torricelli, vitezele de ieșire a lichidului prin cele două orificii au valorile

$$v_1 = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

$$v_2 = \sqrt{2g(h+d)} \quad (2)$$

unde h este adâncimea primului orificiu în raport cu suprafața liberă. Jeturile de lichid se întâlnesc dacă nivelul lichidului în vas rămâne constant, ceea ce implică

$$Q_v = Av_1 + Av_2. \quad (3)$$

Din ecuațiile aruncării pe orizontală, pentru punctul de întâlnire a jeturilor, avem

$$x = v_1 t_1 = v_2 t_2 \quad (4)$$

$$y = h + \frac{gt_1^2}{2} = h + d + \frac{gt_2^2}{2} \quad (5)$$

unde t_1 și t_2 reprezintă timpurile în care o particulă de lichid ajunge de la orificiile corespunzătoare la punctul de intersecție.

Avem astfel

$$x = 2\sqrt{h(h+d)}, \quad y = 2h + d$$

de unde

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_v^2}{2gA^2} - d^2 \cdot \frac{2gA^2}{Q_v^2} \right) \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_v^2}{2gA^2} + d^2 \cdot \frac{2gA^2}{Q_v^2} \right), \quad (7)$$

care sînt coordonatele cerute.

7.9. Un vas plin cu lichid pînă la înălțimea h stă pe un scaun neted. Pe peretele lateral, în imediata apropiere a fundului, vasul are un orificiu de arie A , astupat cu un dop.

Greutatea vasului și a apei din el este G . Să se afle valoarea maximă a coeficientului de frecare dintre vas și scaun pentru ca la scoaterea dopului vasul să se pună în mișcare sub influența jetului de lichid (densitatea lichidului este ρ) (fig. 7.9).

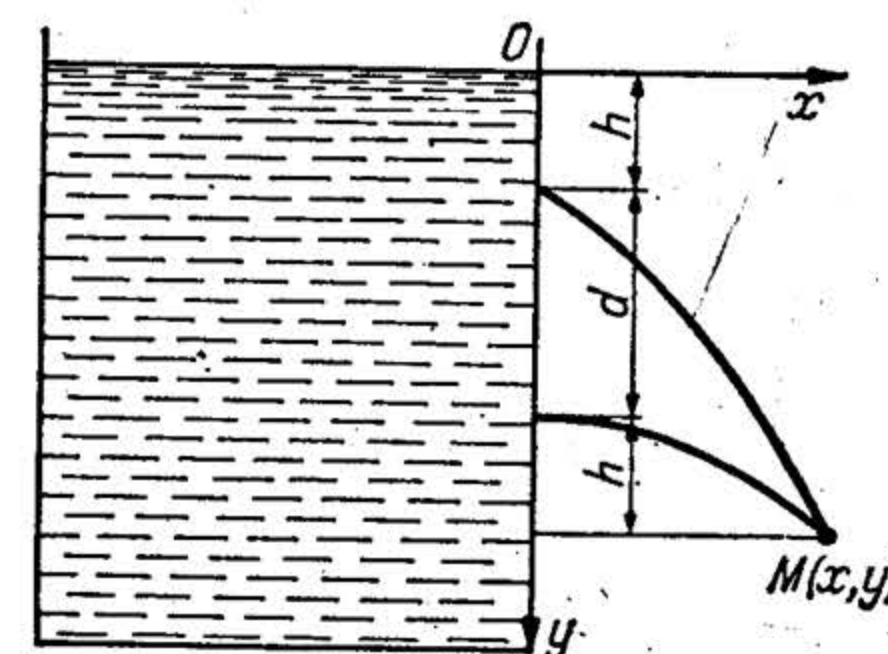


Fig. 7.8

Soluție. Viteza de ieșire a jetului de apă, la nivelul orificiului, este

$$v = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

iar masa de lichid ieșită prin orificiu în timpul Δt este

$$\Delta m = \rho A v \cdot \Delta t \quad (2)$$

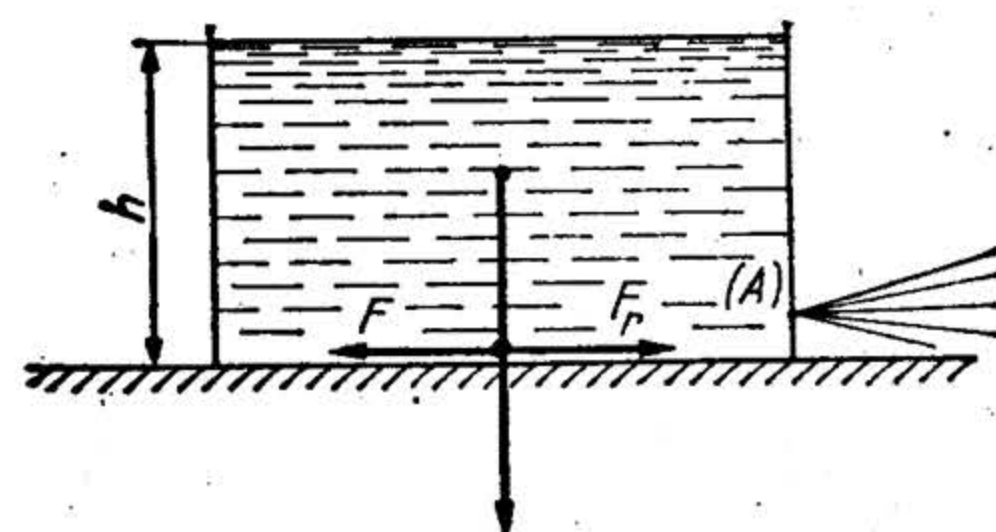


Fig. 7.9

Forța cu care jetul împinge vasul are valoarea dată de conservarea impulsului

$$F \cdot \Delta t = \Delta m \cdot v \quad (3)$$

sau

$$F = \rho A v^2 \quad (4)$$

sau

$$F = 2\rho ghA. \quad (5)$$

Deoarece frecarea dintre vas și scaun este

$$F_r = \mu G; \quad (6)$$

rezultă că vasul începe să se miște dacă:

$$F_r \leq F \quad (7)$$

de unde

$$\mu_{\max} = \frac{2\rho ghA}{G}. \quad (8)$$

7.10. Se dau două corpuri cu densitățile ρ_1 și ρ_2 care, în vid, au aceeași greutate. Ele se atarnă la capetele unei balanțe și se scufundă într-un lichid cu densitatea ρ . Ce relație este între brațele balanței în echilibru în lichid (fig. 7.10)?

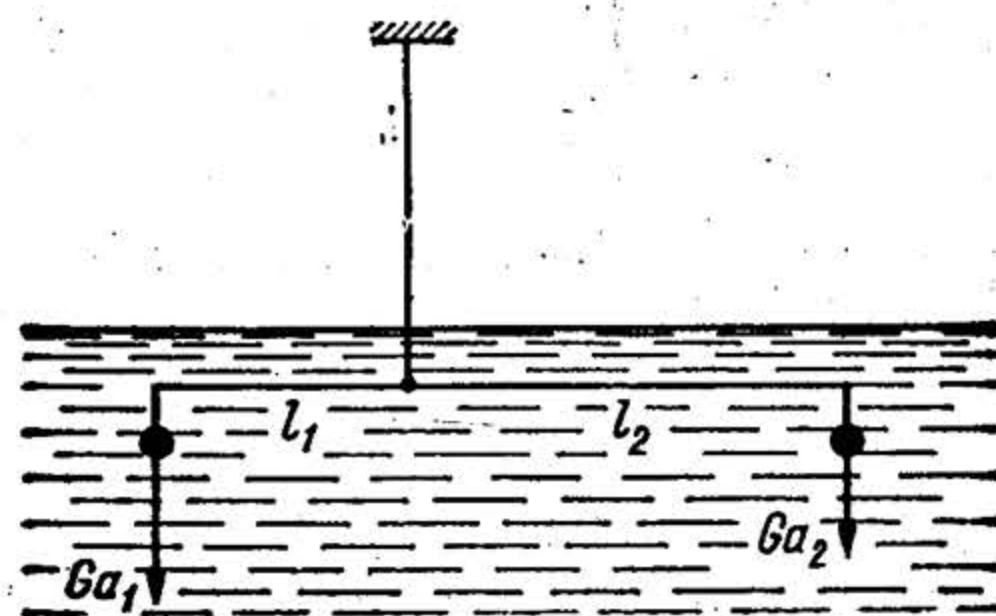


Fig. 7.10

Soluție. Volumele celor două corpuri sînt

$$V_1 = \frac{G}{\rho_1 g} \quad (1)$$

$$V_2 = \frac{G}{\rho_2 g} \quad (2)$$

iar greutățile lor aparente în lichid

$$G_{a1} = G - \rho V_1 g = G \left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right) \quad (3)$$

$$G_{a2} = G - \rho V_2 g = G \left(1 - \frac{\rho}{\rho_2}\right). \quad (4)$$

Fie l_1 și l_2 brațele balanței. La echilibru, avem

$$G_{a1} \cdot l_1 = G_{a2} \cdot l_2 \quad (5)$$

de unde

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_2 - \rho} \quad (6)$$

care este condiția cerută.

7.11. O pompă, acționată de un motor, cu randamentul η , urcă apă într-un tub cilindric cu secțiunea A și înălțimea h . Știind că debitul de masă este Q_m , se cere puterea minimă a pompei (fig. 7.11.).

Soluție. Calculele se fac pentru centrul de greutate al cilindrului plin cu lichid. În acel punct energia totală a masei de apă va fi

$$E = E_c + E_p \quad (1)$$

sau

$$E = \frac{mv^2}{2} + mg \frac{h}{2} = \frac{m}{2} (v^2 + gh) \quad (2)$$

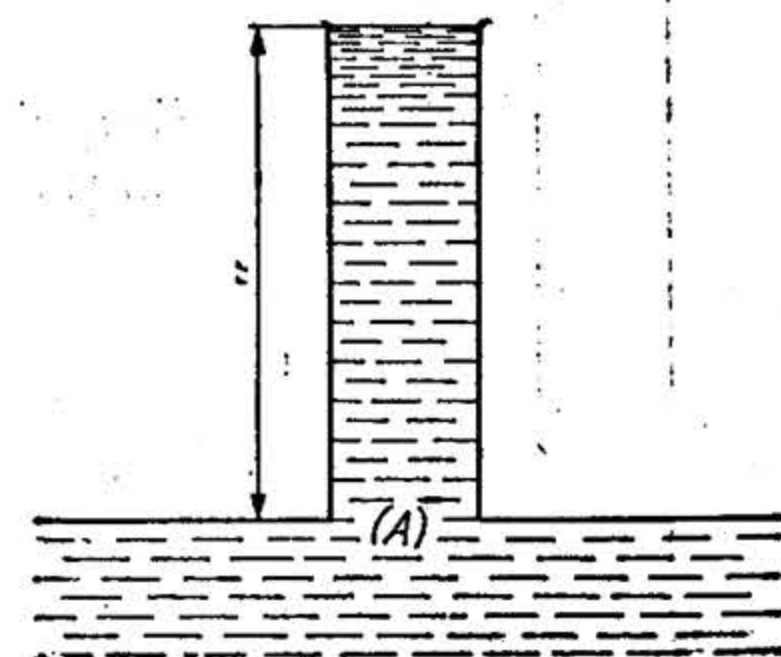


Fig. 7.11

unde m este masa lichidului din tubul de urcare.

Știind că

$$\eta = \frac{L_u}{L_c} \quad (3)$$

sau

$$\eta = \frac{E}{P_{\min} \cdot t} \quad (4)$$

avem

$$P_{min} = \frac{E}{\rho t} \quad (5)$$

Observind că

$$Q_m = \frac{m}{t} = \rho A v \quad (6)$$

avem în final

$$P_{min} = \frac{Q_m}{2\eta} \left(\frac{Q_m^2}{\rho^2 A^2} + gh \right) \quad (7)$$

7.12. Un rezervor plin cu apă prezintă o spărtură de rază r pe fundul circular al vasului de rază R . În cât timp se golește rezervorul dacă la momentul inițial $t = 0$ avem înălțimea coloanei de lichid $h = h_0$ (fig. 7.12)?

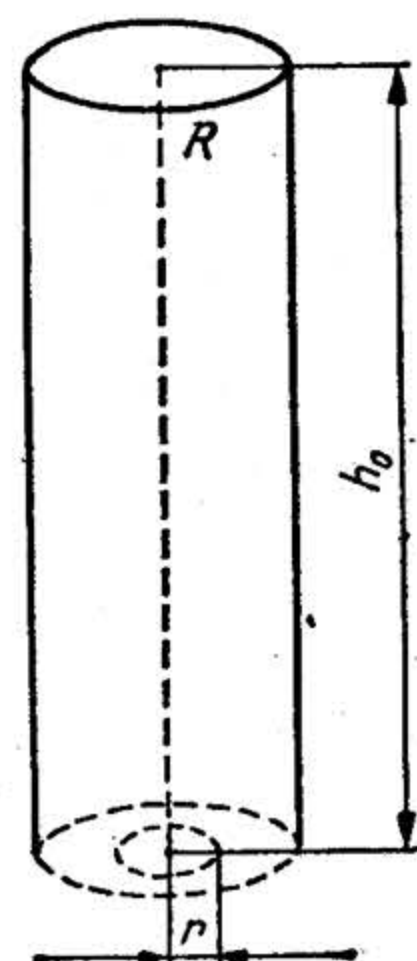


Fig. 7.12

Soluție. Ecuația de continuitate, combinată cu cea a lui Torricelli, ne dă

$$Q_v = \pi r^2 \sqrt{2gh} \quad (1)$$

În timpul dt nivelul lichidului scade cu dh , astfel încât ecuația diferențială a curgerii este

$$Q_v \cdot dt = -\pi R^2 dh \quad (2)$$

sau

$$dt = + \frac{R^2}{v^2 \sqrt{2gh}} dh \quad (3)$$

Rezultă

$$\int_0^t dt = \frac{R^2}{v^2 \sqrt{2g}} \int_0^{h_0} \frac{dh}{\sqrt{h}} = \quad (4)$$

$$t = \frac{2R^2}{v^2} \sqrt{\frac{h_0}{2g}} \quad (5)$$

7.13. O sferă cu volumul V plutește la suprafața de separație a două lichide nemiscibile. Densitatea corpului este ρ , iar a celor două lichide ρ_1 și ρ_2 ($\rho_1 < \rho < \rho_2$). Să se determine porțiunile din volumul sferei situate în cele două lichide. *Discuție* (fig. 7.13).

Soluție. Fie V_1 și V_2 volumele celor două porțiuni. Este evident că

$$V = V_1 + V_2 \quad (1)$$

Greutatea sferei va fi

$$G = (V_1 + V_2) \rho g \quad (2)$$

Forța arhimedică totală are valoarea

$$G_{disl} = V_1 \rho_1 g + V_2 \rho_2 g \quad (3)$$

și în cazul plutirii ea egalează greutatea corpului

$$(V_1 + V_2) \rho = V_1 \rho_1 + V_2 \rho_2 \quad (4)$$

de unde volumele părților vor fi

$$V_1 = V \cdot \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1} \quad (5)$$

$$V_2 = V \cdot \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \quad (6)$$

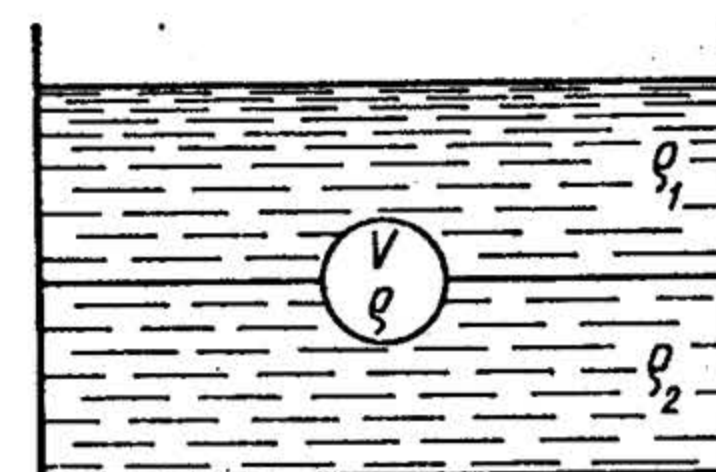


Fig. 7.13

Cazuri particulare:

a) Dacă $\rho = \rho_1$, avem

$$V_1 = V \quad (7)$$

și $V_2 = 0$, adică sfera se află integral în lichidul mai ușor (superior).

b) Dacă $\rho = \rho_2$, avem

$$V_2 = V \quad (8)$$

și $V_1 = 0$, adică sfera este introdusă toată în lichidul mai greu (inferior).

7.14. Din vârful unui plan înclinat sub unghiul α este lansat spre baza planului un corp cu viteza inițială v_0 . Înălțimea planului este h . După parcurgerea planului, corpul (densitatea corpului este ρ_1) intră într-un lichid cu densitatea ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$). Suprafața liberă a lichidului este la aceeași înălțime ca baza planului. Se cer:

a) timpul *maxim* în care corpul se deplasează prin lichid;

b) adâncimea *maximă* la care corpul pătrunde prin lichid;

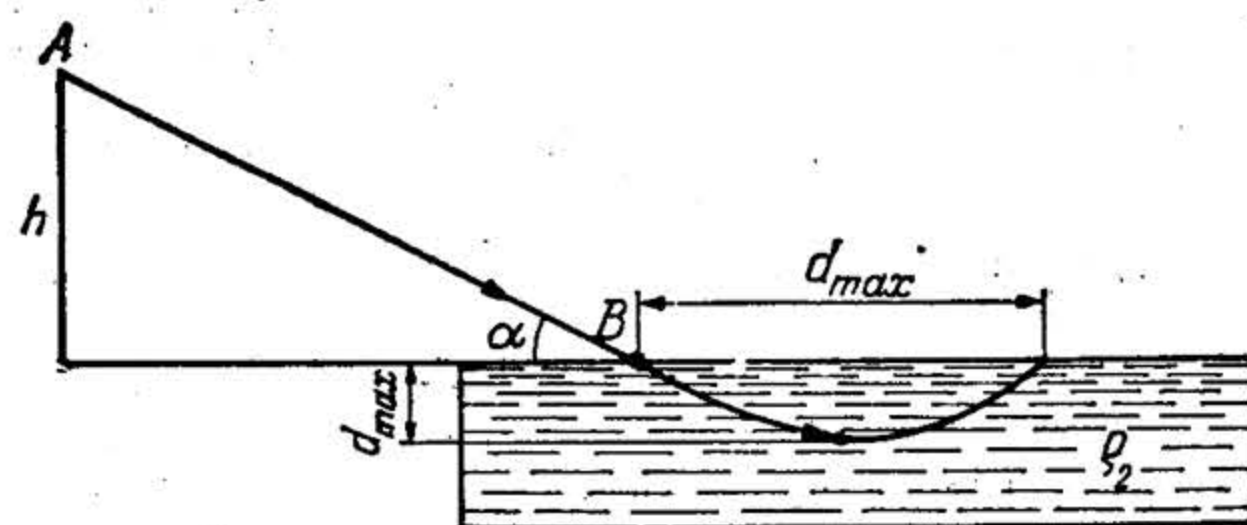


Fig. 7.14

c) distanța maximă parcursă de corp. (pe orizontală) prin lichid (fig. 7.14).

Aplicație pentru $\alpha = 30^\circ$; $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $h = 4 \text{ m}$;

$$\rho_1 = 800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}; \rho_2 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

$$\mu = 0,1; g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Soluție. a) Mai întâi se observă că lungimea planului înclinat este

$$l = \frac{h}{\sin \alpha} = 8 \text{ m} \quad (1)$$

iar accelerația de coborire pe plan are valoarea

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 4,15 \text{ m/s}^2. \quad (2)$$

Rezultă că mobilul ajunge la baza planului cu viteza

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + 2al} = 13 \text{ m/s} \quad (3)$$

În acest moment, corpul intră în lichid, cu viteza inițială v_B .

Mișcarea prin lichid echivalează cu o aruncare oblică. Componentele vitezei inițiale de aruncare vor fi (pe verticală și orizontală)

$$v_{0v} = v_B \sin \alpha = 6,5 \text{ m/s} \quad (4)$$

$$v_{0o} = v_B \cos \alpha = 11,2 \text{ m/s}. \quad (5)$$

Accelerația corpului prin lichid se calculează din forța ascensională și are valoarea

$$a' = g \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \right) = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (6)$$

Din aruncarea oblică se știe că timpul maxim de deplasare este

$$t_{\max} = \frac{2v_{0v}}{a'} = \frac{2v_B \sin \alpha}{a'} = 5,2 \cdot \text{s}. \quad (7)$$

b) Adâncimea maximă este dată de expresia

$$h_{\max} = \frac{v_B^2 \sin^2 \alpha}{2a'} = 8,45 \text{ m} \quad (8)$$

c) Distanța maximă pe orizontală va fi

$$d_{\max} = \frac{v_B^2 \sin 2\alpha}{a'} = 58,4 \text{ m}. \quad (9)$$

7.15. Un corp are greutatea reală G și greutatea aparentă, într-un lichid cu densitatea ρ_1 , egală cu G_a . Densitatea corpului este ρ ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

a) Pentru $G = 2,58 \text{ N}$; $G_a = 1 \text{ N}$; $\rho = 2580 \text{ kg/m}^3$; $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$, se întreabă dacă corpul are sau nu goluri în interior. În caz afirmativ, care este volumul golurilor?

b) Corpul de la punctul a), considerat plin, este lăsat să coboare prin apă pînă la adâncimea de $h = 20 \text{ m}$. Se cer:

b₁) timpul în care sînt parcurși ultimii $h' = 5 \text{ m}$.

b₂) distanța parcursă numai în ultima secundă.

Soluție. a) Se calculează mai întâi volumul V al corpului în ipoteza că ar fi plin. Avem

$V = m/\rho = G/\rho g = 10^{-4} \text{ m}^3$. Calculăm apoi volumul V' al corpului prin intermediul greutății aparente

$$G_a = G - F_A = G - V' \rho_1 g$$

de unde

$$V' = 1,58 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3.$$

Deoarece $V' \neq V$, corpul are goluri, al căror volum este

$$V'' = V' - V = 0,58 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3.$$

b) Calculăm accelerația corpului prin apă. Avem

$$ma = G - F_A \text{ sau } Ga/g = G - V' \rho_1 g$$

de unde

$$a \approx 6 \text{ m/s}^2.$$

b₁) Timpul total de mișcare este

$$t = \sqrt{2h/a} \simeq 2,6 \text{ s.}$$

Primii $h - h'$ metri sînt parcurși în timpul:

$$t' = \sqrt{2(h - h')/a} \simeq 2,23 \text{ s.}$$

Deci, ultimii h' metri sînt parcurși în timpul

$$t'' = t - t' = 0,37 \text{ s.}$$

b₂) Pînă la începutul ultimei secunde, corpul a coborît pe distanța

$$h'' = a(t - 1)^2/2 = 7,68 \text{ m.}$$

În ultima secundă el va parcurge distanța

$$\Delta h = h - h'' = 12,32 \text{ m.}$$

7.16. O picătură de apă, care are o viteză limită v , se desface instantaneu în n picături mai mici identice. Care va fi viteza limită a unei picături mici?

Soluție. Fie v' viteza limită cerută a unei picături mici de arie S' . Din valoarea rezistenței la înaintare, avem

$$Sv^2 = nS'v'^2 \quad (1)$$

unde S este aria picăturii mari. Rezultă

$$v' = v \sqrt{\frac{S}{nS'}} \quad (2)$$

Notînd cu R și M raza, respectiv masa picăturii inițiale de densitate ρ , avem

$$\begin{aligned} \frac{4\pi R^3}{3} &= \frac{M}{\rho} \\ R &= \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}} \\ S &= 4\pi \sqrt{\frac{9M^2}{16\pi^2\rho^2}} \end{aligned} \quad (3)$$

Notînd cu r raza picăturii mici, avem

$$\begin{aligned} \frac{4\pi r^3}{3} &= \frac{M}{n\rho} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi n\rho}} \\ S' &= 4\pi \sqrt{\frac{9M^2}{16\pi^2\rho^2 n^2}} \end{aligned} \quad (4)$$

Din (2) rezultă

$$v' = \frac{v}{\sqrt[3]{n}}.$$

VIII. REZISTENȚA MATERIALELOR

8.1. Rezistența la comprimare a unei grinzi este proporțională cu secțiunea acesteia, iar la încovoiere (în poziție orizontală) este proporțională cu lungimea secțiunii și cu pătratul înălțimii acestei secțiuni (presupusă dreptunghiulară în ambele cazuri). Grinda se confecționează dintr-o birnă cilindrică cu diametrul d . Ce valoare trebuie să aibă lungimea l a secțiunii pentru ca rezistența grinzii să fie *maximă* (fig. 8.1)?

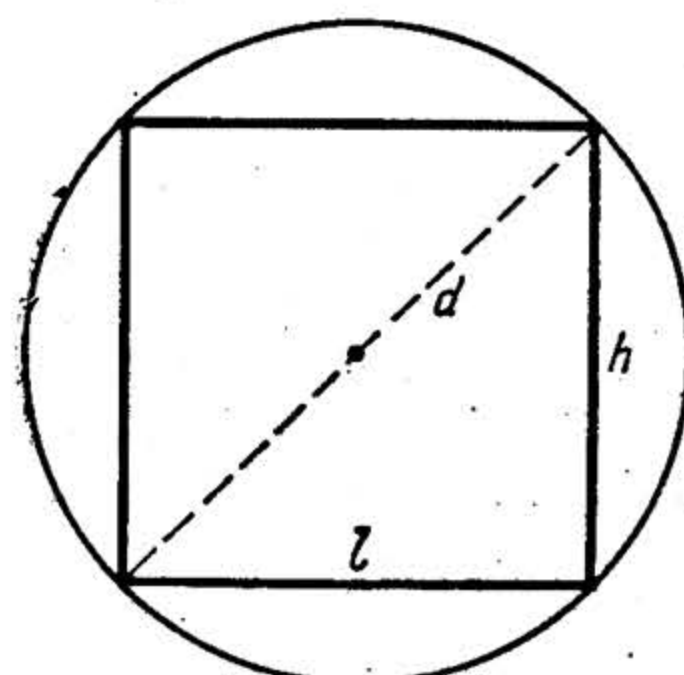


Fig. 8.1

Soluție. a) În primul caz rezistența are valoarea

$$R = kS = klh. \quad (1)$$

Convenind $k = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, valoarea rezistenței este

$$R = l \sqrt{d^2 - l^2}. \quad (2)$$

Derivata rezistenței în raport cu lungimea va fi

$$R' = \frac{dR}{dl} = \frac{d^2 - 2l^2}{\sqrt{d^2 - l^2}}. \quad (3)$$

Din anularea ei se obține

$$[l]_{R=R_{\max}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}. \quad (4)$$

Într-adevăr funcția (1) trece printr-un maxim, căci pentru

$$l < \frac{d\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R' > 0 \text{ și pentru } l > \frac{d\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R' < 0.$$

În acest caz secțiunea trebuie să fie un pătrat

b) În al doilea caz rezistența este

$$R = kl(d^2 - l^2) \quad (5)$$

Considerind $k = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$ și derivând în raport cu l , avem

$$\frac{dR}{dl} = d^2 - 3l^2. \quad (6)$$

Prin anularea derivatei se obțin dimensiunile secțiunii

$$[l]_{R=R_{\max}} = \frac{d\sqrt{3}}{3} \quad (7)$$

$$[h]_{R=R_{\max}} = \frac{d\sqrt{6}}{3}. \quad (8)$$

Asemănător ca mai sus se arată că (5) trece printr-un maxim.

8.2. O sîrmă de cupru are rezistența la rupere de $4,116 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$. Să se afle lungimea *minimă* la care sîrma se rupe din cauza greutatei proprii. La ce temperatură trebuie adusă sîrma (plecînd de la 0°C) împiedicată să se dilate pentru a obține *același* efort unitar? ($\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$; $\alpha = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$; $E = 9,8 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$.)

Soluție. Efortul unitar normal este asigurat de greutatea proprie, adică

$$\tau = \frac{G}{S}. \quad (1)$$

Sîrma fiind cilindrică, avem

$$\tau = \frac{mg}{S} = \frac{v\rho g}{S}. \quad (2)$$

sau

$$\rho = l_{\min} \cdot \rho g \quad (3)$$

de unde

$$l_{\min} = \frac{\tau}{\rho g} = 4,624 \text{ m}. \quad (4)$$

Din valoarea forței de dilatare

$$\frac{F}{S} = \tau = E\alpha t^\circ \quad (5)$$

avem

$$t^\circ = \frac{\tau}{E\alpha} = 246^\circ\text{C}. \quad (6)$$

8.3. Un fir extensibil, de lungime nedeformată l_0 , susține un corp de masă m , în rotație într-un plan vertical (se presupun date E și S pentru fir). Între ce limite este cuprinsă alungirea absolută a firului? Care este valoarea maximă a perioadei de rotație pentru care alungirea absolută se anulează (fig. 8.3)?

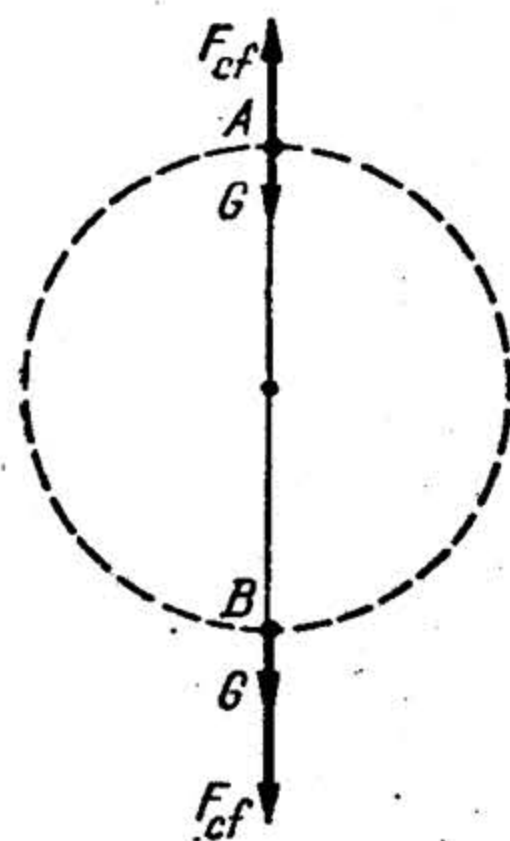


Fig. 8.2

Soluție. În punctul culminant A avem:

$$F = F_{cf} - G \quad (1)$$

unde

$$F = ES \cdot \frac{\Delta l_{min}}{l_0}$$

$$F_{cf} = \frac{mv^2}{l_0 + \Delta l_{min}} = m\omega^2(l_0 + \Delta l_{min}) \quad (2)$$

$$G = mg$$

unde ω este viteza unghiulară de rotație a firului. Avem

$$\Delta l_{min} = \frac{ml_0(l_0\omega^2 - g)}{ES - m\omega^2l_0} \quad (3)$$

În punctul B, avem (după un calcul similar)

$$\Delta l_{max} = \frac{ml_0(l_0\omega^2 + g)}{ES - m\omega^2l_0} \quad (4)$$

deci

$$\Delta l_{min} \leq \Delta l \leq \Delta l_{max} \quad (5)$$

Numai alungirea absolută minimă se poate anula și din $\Delta l_{min} = 0$ avem

$$\frac{4\pi^2l_0}{T_0^2} = g \quad (6)$$

de unde

$$[T_0]_{\Delta l=0} = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}} \quad (7)$$

8.4. Două fire de metale diferite, au aceeași lungime nedeformată. Sub acțiunea aceleiași forțe, ele capătă aceeași alungire absolută. Știind că modulele de elasticitate sînt E_1 și E_2 , iar primul fir are diametrul d_1 , să se calculeze cele de al doilea diametru. Aplicație pentru: $E_1 = 9,8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$; $E_2 = 1,96 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $d_1 = 10^{-3} \text{ m}$.

Soluție. Conform legii lui Hooke, avem relațiile

$$\frac{4F_1}{\pi d_1^2} = E_1 \cdot \frac{\Delta l_1}{l_{01}} \quad (1)$$

$$\frac{4F_2}{\pi d_2^2} = E_2 \cdot \frac{\Delta l_2}{l_{02}}$$

Conform problemei $\Delta l_1 = \Delta l_2$, $F_1 = F_2$, $l_{01} = l_{02}$. Deci

$$d_1^2 E_1 = d_2^2 E_2 \quad (2)$$

de unde

$$d_2 = d_1 \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \quad (3)$$

Valoarea numerică este: $d_2 = 71 \cdot 10^{-5} \text{ m}$.

8.5. Se dau două fire metalice (de natură diferită) care susțin un corp (fig. 8.5). Metalele au limita tensiunilor admisibile la întindere σ_1 și σ_2 și secțiunile S_1 și S_2 . Știind că firele formează între ele unghiul 2α , să se calculeze greutatea maximă a corpului atârnat de fire (se impune un coeficient de siguranță k).

Soluție. Greutatea G a corpului se descompune în componentele

$$F_1 = F_2 = \frac{G}{2 \cos \alpha} \quad (1)$$

Pe de altă parte avem

$$F_1 = \sigma_1 S_1 \quad (2)$$

$$F_2 = \sigma_2 S_2 \quad (3)$$

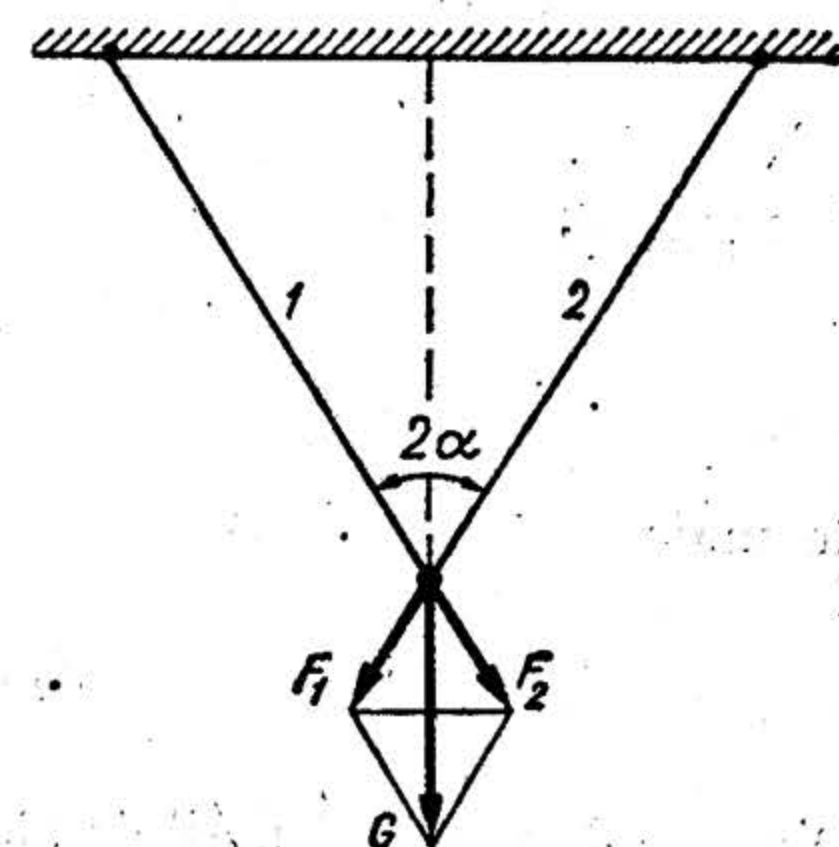


Fig. 8.5

Trebuie să alegem cea mai mică din aceste forțe la care rezistă firele. Fie această forță F_1 . Avem

$$G_{max} = 2F_1 \cos \alpha. \quad (4)$$

Impunându-se un coeficient de siguranță, rezultă că

$$G'_{max} = \frac{G_{max}}{k} = \frac{2F_1}{k} \cos \alpha. \quad (5)$$

8.6. O bară metalică cilindrică, cu modulul de elasticitate E , este întinsă de o forță F . Alungirea relativă nu trebuie să depășească valoarea ε , iar efortul unitar nu trebuie să treacă de valoarea σ . Se cere diametrul minim al cilindrului care îndeplinește aceste condiții.

Soluție. Calculăm diametrul barei pe două căi:

a) avem

$$\frac{4F}{\pi d_1^2} \leq E\varepsilon \quad (1)$$

de unde

$$d_1 = 2 \sqrt{\frac{F}{\pi E\varepsilon}} \quad (2)$$

b) avem

$$\frac{4F}{\pi d_2^2} \leq \sigma \quad (3)$$

de unde

$$d_2 = 2 \sqrt{\frac{F}{\pi \sigma}} \quad (4)$$

Din cele două valori posibile ale aceluiași diametru se va alege valoarea cea mai mare.

8.7. Se dă sistemul din figură în care se presupune că barele 1 și 2 rezistă solicitărilor impuse. Mărimile l , α_1 , α_2 se presupun cunoscute. Pe bara 3 se așază un corp de o anumită greutate. Se cere: poziția corpului pe bara 3 astfel încât barele 1 și 2 să fie egal solicitate la întindere.

Soluție. Avem relațiile

$$G'_1 = \frac{G_1}{\sin \alpha_1} \quad (1)$$

$$G'_2 = \frac{G_2}{\sin \alpha_2}$$

Dacă $G'_1 = G'_2$, rezultă

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \quad (2)$$

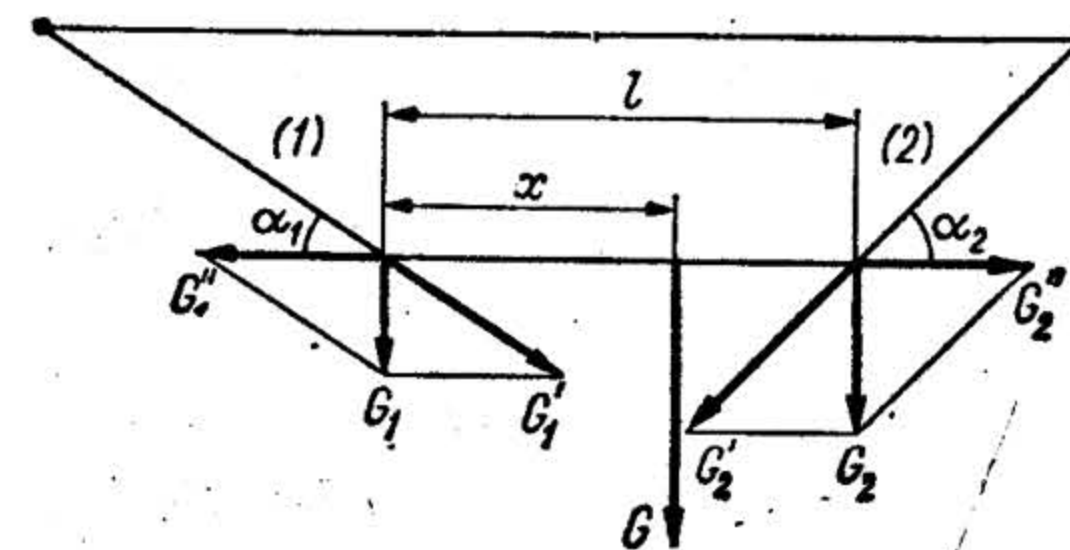


Fig. 8.7

Pe de altă parte, avem

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{l-x}{x} \quad (3)$$

de unde poziția cerută în condiția impusă este

$$x = l \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2} \quad (4)$$

8.8. O bară metalică de lungime l și de secțiune constantă S este suspendată vertical și acționată de o forță axială F . Între ce limite variază efortul unitar suportat de bară? (Densitatea materialului barei este ρ ; fig. 8.8.)

Soluție. Considerăm o secțiune în bară plasată la distanța x de baza inferioară (2). Greutatea porțiunii de sub acest nivel a barei este

$$G_x = m_x g = V_x \rho g = S x \rho g \quad (1)$$

Efortul unitar la nivelul acestei secțiuni este

$$\sigma_x = \frac{F + G_x}{S} \quad (2)$$

sau

$$\sigma_x = \frac{F}{S} + x \rho g \quad (3)$$

Efortul unitar maxim se obține la secțiunea (1) și are valoarea

$$\sigma_{max} = [\sigma_x]_{x=l} = \frac{F}{S} + l \rho g \quad (4)$$

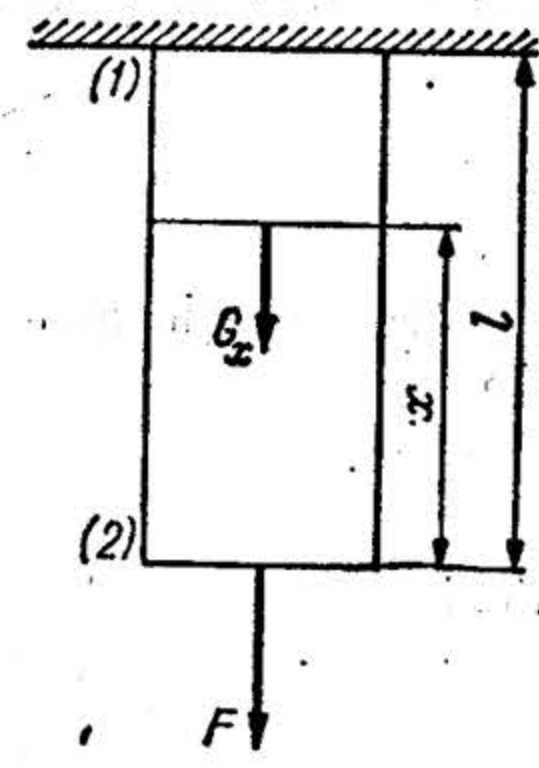


Fig. 8.8

iar cel minim se obține la secțiunea (2) și are valoarea

$$\sigma_{min} = [\sigma_x]_{x=0} = \frac{F}{S} \quad (5)$$

deci

$$\sigma_{min} < \sigma < \sigma_{max}$$

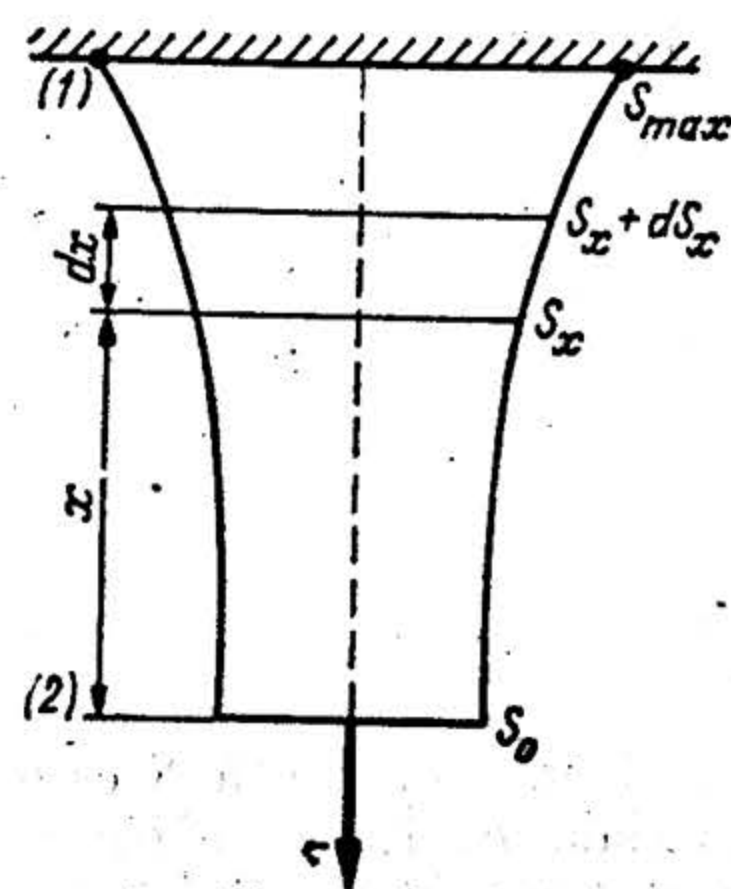


Fig. 8.9

8.9. Bara din problema precedentă are secțiunea inferioară S_0 și efortul unitar σ constant de-a lungul barei. Se cere secțiunea maximă a barei (fig. 8.9).

Soluție. Deoarece efortul unitar este constant, rezultă că secțiunea barei este variabilă.

Secțiunea maximă se obține la (1), iar cea minimă la (2). Se consideră o secțiune în bară dusă la nivelul x și una imediat următoare, la nivelul $x + dx$.

Secțiunile astfel luate au valorile: S_x și $S_x + dS_x$. Avem

$$\sigma S_x = F + G_x \quad (1)$$

$$\sigma(S_x + dS_x) = F + G_x + \rho g S_x dx. \quad (2)$$

(considerînd porțiunea dintre S_x și $S_x + dS_x$ drept o prismă). Din (1) (2) se obține, prin scădere, ecuația diferențială

$$\frac{dS_x}{S_x} = \frac{\rho g}{\sigma} dx \quad (3)$$

a cărei soluție este (prin impunerea condiției inițiale $x = 0 \Rightarrow S_x = S_0$).

$$S_x = S_0 e^{\frac{\rho g x}{\sigma}} \quad (4)$$

deci

$$S_{max} = S_x \Big|_{x=l} = S_0 e^{\frac{\rho g l}{\sigma}}. \quad (5)$$

IX. FIZICĂ MOLECULARĂ. TERMODINAMICĂ

9.1. Un fir metalic de lungime $2l$ este fixat în două puncte A și B , pe aceeași orizontală. La mijloc se așează o greutate care coboară pe o distanță oarecare. Cu câte grade trebuie să încălzim firul pentru a produce o alungire de n ori mai mică decît distanța amintită? Să se observe o proprietate interesantă a intervalului termic cerut (fig. 9.1).

Soluție. Conform legii dilatării liniare, alungirea firului pe cale termică este

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta t = 2l \alpha \Delta t. \quad (1)$$

Din enunț, avem

$$MM' = n \Delta l \quad (2)$$

sau

$$MM' = 2l \alpha n \Delta t. \quad (3)$$

Din figură avem

$$AM' = \frac{l_t}{2} = \frac{2l(1 + \alpha \Delta t)}{2} = l(1 + \alpha \Delta t) \quad (4)$$

$$MM' = \sqrt{AM'^2 - AM^2} = l \sqrt{(1 + \alpha \Delta t)^2 - 1} \quad (5)$$

deci

$$\Delta t = \frac{2}{\alpha(4n^2 - 1)} \quad (6)$$

adică temperatura este independentă de lungimea firului.

9.2. Se dau n corpuri de mase m_1, m_2, \dots, m_n , cu căldurile specifice c_1, c_2, \dots, c_n și cu temperaturile inițiale $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Sistemul

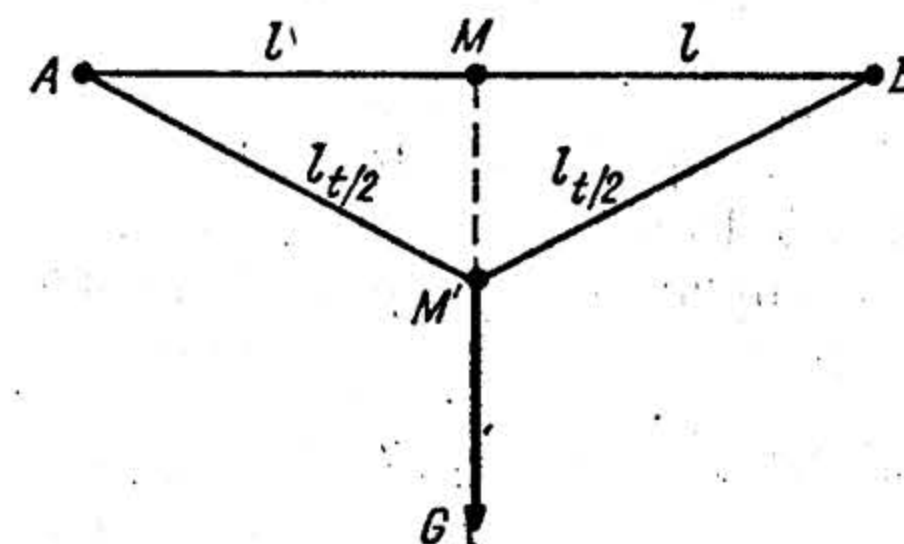


Fig. 9.1

ajunge în echilibru termic. Să se arate că temperatura finală θ îndeplinește condiția: $t_1 < \theta < t_n$.

Soluție. Conform principiilor calorimetrice, temperatura finală are valoarea

$$\theta = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 + \dots + m_n c_n t_n}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots + m_n c_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i c_i t_i}{\sum_{i=1}^n m_i c_i} \quad (1)$$

Soluția problemei revine la verificarea inegalităților evidente:

$$m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 + \dots + m_n c_n t_n < t_n (m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots + m_n c_n) \quad (2)$$

$$m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 + \dots + m_n c_n t_n > t_1 (m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots + m_n c_n). \quad (3)$$

9.3. Două lichide au temperaturile inițiale t_1 și t_2 ($t_1 > t_2$). Masa celui de al doilea lichid este m_2 . Lichidele se amestecă astfel încât temperatura finală θ respectă condiția $t_2 < t'_2 < \theta < t'_1 < t_1$. Între ce limite este cuprinsă masa primului corp? (Căldurile specifice ale lichidelor sînt c_1 și c_2 .)

Soluție. Avem

$$\theta = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}.$$

Din condițiile

$$\theta > t'_2, \theta < t'_1$$

rezultă

$$\frac{m_2 c_2 (t'_2 - t_2)}{c_1 (t_1 - t'_2)} < m_1 < \frac{m_2 c_2 (t'_1 - t_2)}{c_1 (t_1 - t'_1)}.$$

9.4. a) Cu o masă oarecare de gaz perfect realizăm o transformare izobară în care volumul să crească *cît mai repede* cu temperatura. Cum trebuie să luăm presiunea inițială a gazului, *mai mare* sau *mai mică*?

b) Cu aceeași masă de gaz realizăm o transformare izocoră în care vrem ca presiunea să crească *cît mai încet* cu temperatura. Vom folosi un vas cu volumul mai mare sau *mai mic*?

Soluție. a) Din legea Gay-Lussac avem

$$V = \frac{V_0}{T_0} T \quad (1)$$

iar din ecuația de stare (inițială)

$$p_0 V_0 = \nu R T_0 \quad (2)$$

de unde

$$V = \frac{\nu R T_0}{p_0}. \quad (3)$$

Deoarece

$$\alpha = \arctg \frac{\nu R}{p_0}$$

rezultă că dacă luăm o presiune inițială (constantă) mai mică, viteza de creștere a volumului este mai mare.

b) Un raționament analog arată că

$$p = \frac{\nu R}{V_0} T. \quad (4)$$

Deci, dacă vrem ca presiunea să crească cît mai lent o dată cu temperatura, trebuie să folosim un vas cu un volum inițial (constant) mai mare.

9.5. Un meteorit intră în atmosfera terestră. Ce viteză inițială *minimă* trebuie să aibă pentru ca:

a) să se topească la temperatura de topire t_i (temperatura inițială este t_0);

b) să se transforme în vapori la temperatura de fierbere t_f . Celelalte constante termice ale substanței meteoritului se presupun cunoscute.

Soluție. a) Căldura necesară topirii are valoarea

$$Q = mc(t_i - t_0) + m\lambda \quad (1)$$

care provine din transformarea energiei cinetice inițiale

$$E_{c0} = \frac{mv_0^2}{2} \quad (2)$$

de unde

$$V_{0min} = \sqrt{2[c(t_i - t_0) + \lambda]}. \quad (3)$$

b) Căldura necesară fierberii este

$$Q' = m[c(t_f - t_0) + \lambda + c'(t_f - t_i) + l] \quad (4)$$

care rezultă din transformarea energiei cinetice inițiale

$$E_{c0} = \frac{mv_0'^2}{2} \quad (5)$$

de unde

$$V_{0min} = \sqrt{2[c(t_f - t_0) + \lambda + c'(t_f - t_1) + l]}. \quad (6)$$

9.6. O sîrmă metalică cu lungimea l are temperatura t_1 . Ea este răcită pînă la temperatura t_2 . Să se determine frecvența *minimă* de rotație pentru ca lungimea sîrmei (care are la capăt un corp cu masa m) să fie *invariabilă*. Se presupun cunoscute constantele termice și mecanice ale materialului sîrmei.

Soluție. Con tracția sîrmei produsă prin răcire este

$$(\Delta l)_{termic\grave{a}} = l\alpha(t_1 - t_2) \quad (1)$$

unde α este coeficientul de dilatare liniară al sîrmei.

Alungirea absolută produsă prin forța centrifugă are valoarea

$$(\Delta l)_{mecanic\grave{a}} = \frac{Fl}{SE} \quad (2)$$

unde E este modulul lui Young al sîrmei de secțiune S . Deoarece

$$F = 4\pi^2 \cdot l m v^2 \quad (3)$$

$$(\Delta l)_{termic\grave{a}} = (\Delta l)_{mecanic\grave{a}} \quad (4)$$

avem

$$v_{min} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{SE\alpha(t_1 - t_2)}{ml}}. \quad (5)$$

9.7. Un tub de lungime l conține o coloană de mercur h ce separă o coloană de aer. Tubul se răstoarnă într-un alt vas cu mercur, rămînînd o coloană de mercur în el. Care trebuie să fie lungimea *minimă* a tubului pentru ca mercurul să se verse în vas *în totalitate*? (Presiunea atmosferică este p_a torri; fig. 9.7.)

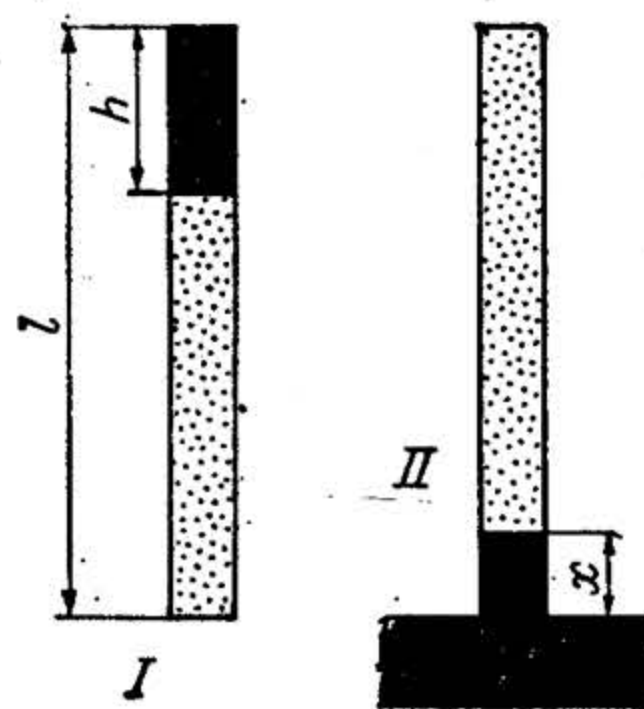


Fig. 9.7

Soluție. Aerul suferă o transformare izotermă. Notînd cu S secțiunea tubului, avem (fig. 9.7)

$$\begin{aligned} p_I &= p_a + h \\ V_I &= S(l - h) \\ p_{II} &= p_a - x \\ V_{II} &= S(l - x). \end{aligned} \quad (1)$$

Conform legii Boyle-Mariotte, rezultă

$$(p_a + h)(l - h) = (p_a - x)(l - x) \quad (2)$$

sau

$$x^2 - (p_a + l)x + h^2 - hl + p_a h = 0. \quad (3)$$

Dacă mercurul coboară în totalitate, avem $x = 0$, ceea ce implică

$$h^2 - hl + p_a h = 0 \quad (4)$$

deci

$$l_{min} = p_a + h. \quad (5)$$

9.8. Un cilindru metalic conține un lichid cu temperatura t_1 , pînă la nivelul h_1 . Coeficientul de dilatare liniară al vasului este α , iar cel al lichidului γ . Sistemul se încălzește la temperatura t_2 . Să se discute relația dintre noul nivel și vechiul nivel în funcție de relația dintre cei doi coeficienți.

Soluție. Fie R raza bazei cilindrului metalic la temperatura t_1 . Avem

$$S_{t_1} = \pi R^2 \quad (1)$$

$$S_{t_2} = S_{t_1}[1 + 2\alpha(t_2 - t_1)]. \quad (2)$$

Analog, cele două volume ale lichidului, vor fi

$$V_{t_1} = \pi R^2 h_1 \quad (3)$$

și

$$V_{t_2} = V_{t_1}[1 + \gamma(t_2 - t_1)] = \pi R^2 h_1[1 + \gamma(t_2 - t_1)]. \quad (4)$$

Noul nivel al lichidului va fi

$$h_2 = \frac{V_{t_2}}{S_{t_2}} = h_1 \cdot \frac{1 + \gamma(t_2 - t_1)}{1 + 2\alpha(t_2 - t_1)}. \quad (5)$$

Se observă că:

- a) dacă $\gamma = 2\alpha$ avem $h_2 = h_1$ și nivelul rămâne același;
- b) dacă $\gamma > 2\alpha$ avem $h_2 > h_1$ și nivelul crește după încălzire;
- c) dacă $\gamma < 2\alpha$ avem $h_2 < h_1$ și nivelul scade după încălzire.

9.9. Se dau două bare metalice care la temperatura t_1 au lungimile l_{t_1} și l_{t_2} . Coeficienții de dilatare liniară sînt α_1 și α_2 . Barele sînt încălzite la temperatura $t_2 > t_1$. Ce condiție trebuie să îndeplinească lungimile inițiale și coeficienții de dilatare pentru ca diferența dintre alungirile barelor după încălzire să fie independentă de intervalul de temperatură.

Soluție.

$$l_{t_2} = l_{t_1}[1 + \alpha_1(t_2 - t_1)] \quad (1)$$

$$l_{t_2} = l_{t_2}[1 + \alpha_2(t_2 - t_1)]$$

deci

$$\begin{cases} \Delta l_1 = l_{t_2} - l_{t_1} = l_{t_1} \alpha_1 \cdot \Delta t \\ \Delta l_2 = l_{t_2} - l_{t_1} = l_{t_2} \alpha_2 \cdot \Delta t \end{cases} \quad (2)$$

$$\Delta l = \Delta l_2 - \Delta l_1 = \Delta t(l_{t_2} \alpha_2 - l_{t_1} \alpha_1). \quad (3)$$

Dacă Δl nu depinde de diferența de temperatură, rezultă că

$$l_{t_2} \alpha_2 - l_{t_1} \alpha_1 = 0 \quad (4)$$

sau

$$\frac{l_{t_2}}{l_{t_1}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad (5)$$

care este condiția cerută.

9.10. Se dau barele metalice cu lungimile l_{01} și l_{02} la 0°C . Notînd cu t_1, t_2, t_3 temperaturile la care lungimile, respectiv secțiunile și volumele devin egale, să se determine ordinea de valori a celor 3 temperaturi.

Soluție. Avem

$$\begin{aligned} l_{t_1} &= l_{01}(1 + \alpha_1 t_1) \\ l_{t_1} &= l_{02}(1 + \alpha_2 t_1). \end{aligned} \quad (1)$$

Din $l_{t_1} = l_{t_2}$ avem

$$t_1 = \frac{l_{02} - l_{01}}{l_{01}\alpha_1 - l_{02}\alpha_2}. \quad (2)$$

Din $S_{t_1} = S_{t_2}$, respectiv $V_{t_1} = V_{t_2}$, avem

$$t_2 = \frac{l_{02} - l_{01}}{2(l_{01}\alpha_1 - l_{02}\alpha_2)} \quad (3)$$

$$t_3 = \frac{l_{02} - l_{01}}{3(l_{01}\alpha_1 - l_{02}\alpha_2)}. \quad (4)$$

deci

$$t_1 > t_2 > t_3$$

este relația de ordine cerută.

9.11. Se dau trei bare metalice cu lungimile l_{01}, l_{02}, l_{03} la 0°C . La ce temperatură trebuie încălzite barele ca să formeze un triunghi echilateral? (Se cunosc coeficienții α_1 și α_2 de dilatare liniară ai primelor două bare.)

Soluție. Avem

$$l_{01}(1 + \alpha_1 t) = l_{02}(1 + \alpha_2 t) = l_{03}(1 + \alpha_3 t) \quad (1)$$

unde t este temperatura cerută. Se poate scrie

$$\frac{l_{01}}{l_{03}} = \frac{1 + \alpha_3 t}{1 + \alpha_1 t} \quad (2)$$

$$\frac{l_{02}}{l_{03}} = \frac{1 + \alpha_3 t}{1 + \alpha_2 t}$$

de unde

$$\frac{1 + \alpha_2 t}{1 + \alpha_1 t} = \frac{l_{01}}{l_{02}}. \quad (3)$$

Temperatura cerută va fi deci

$$t = \frac{l_{02} - l_{01}}{l_{01}\alpha_1 - l_{02}\alpha_2}. \quad (4)$$

9.12. O coloană de mercur cu lungimea l separă o coloană de aer într-un tub cilindric închis la un capăt și deschis la celălalt. Coloana metalică este în echilibru cu coloanele de aer de lungimi l_1, l_2, l_3 (fig. 9.12) pentru cazurile cînd tubul este orizontal, vertical cu capătul închis în sus, respectiv în jos. Ce condiție îndeplinesc lungimile celor 3 coloane de aer?

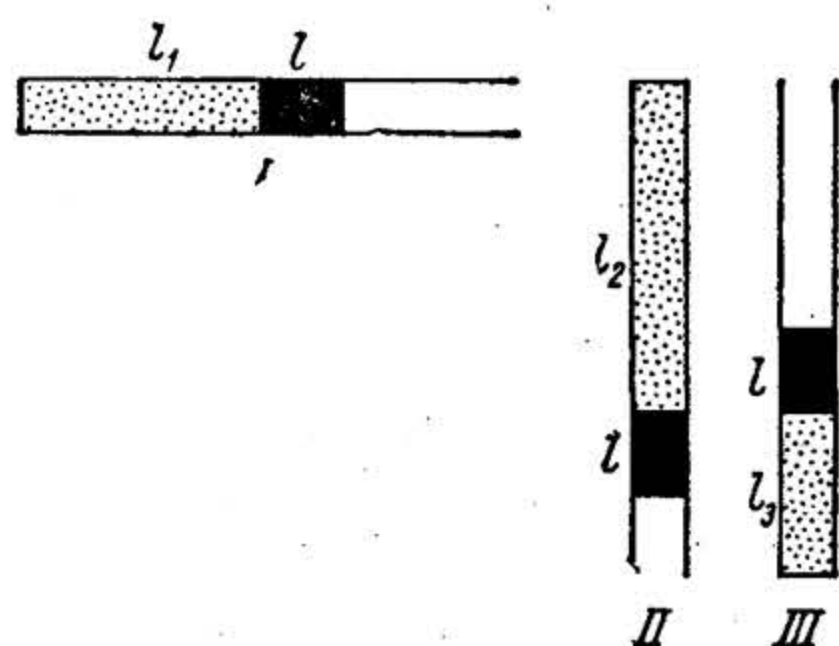


Fig. 9.12

Folosind relațiile transformării izoterme, pe grupe de stări, găsim valorile presiunii atmosferice

$$\begin{aligned} p_a &= \frac{l_2 l}{l_2 - l_1} \\ p_a &= \frac{l_3 l}{l_1 - l_3} \\ p_a &= \frac{l(l_2 + l_3)}{l_2 - l_3} \end{aligned} \quad (2)$$

de unde condiția cerută va fi

$$\frac{l_2}{l_2 - l_1} = \frac{l_3}{l_1 - l_3} = \frac{l_2 + l_3}{l_2 - l_3} \quad (3)$$

9.13. Într-un vas se află o cantitate oarecare de apă rece și apă caldă care împreună au un volum inițial oarecare. Să se observe o proprietate a volumului celor două categorii de apă după stabilirea echilibrului termic.

Soluție. Notăm: m_1 — masa apei mai reci, de temperatură inițială t_1 , m_2 — masa apei mai calde, de temperatură inițială $t_2 > t_1$, θ — temperatura finală a amestecului, ρ_0 — densitatea apei la 0°C , ρ_1 , ρ_2 — densitățile apei reci, respectiv calde, V_1 , V_2 — volumele inițiale ale apei reci, respectiv calde, V'_1 , V'_2 — volumele finale ale apei reci, respectiv calde γ — coeficientul de dilatare al apei.

Ecuția calorimetrică ne dă

$$m_1(\theta - t_1) = m_2(t_2 - \theta). \quad (1)$$

Soluție. Notînd cu p_a presiune atmosferică și cu S secțiunea tubului avem

$$\begin{aligned} \text{I} \begin{cases} p_1 = p_1 \\ V_1 = Sl_1 \end{cases} \\ \text{II} \begin{cases} p_2 = p_a - l \\ V_2 = Sl_2 \end{cases} \\ \text{III} \begin{cases} p_3 = p_a + l \\ V_3 = Sl_3 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Avem

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t_1} \quad (2)$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t_2}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{m_1}{\rho_1} = \frac{m_1}{\rho_0} (1 + \gamma t_1) \\ V_2 &= \frac{m_2}{\rho_2} = \frac{m_2}{\rho_0} (1 + \gamma t_2) \end{aligned} \quad (3)$$

$$V'_1 = \frac{m_1}{\rho_0} = \frac{m_1}{\rho_0} (1 + \gamma \theta)$$

$$V'_2 = \frac{m_2}{\rho_0} = \frac{m_2}{\rho_0} (1 + \gamma \theta).$$

De asemenea

$$V'_1 - V_1 = \frac{m_1}{\rho_0} \gamma (\theta - t_1) \quad (4)$$

$$V_2 - V'_2 = \frac{m_2}{\rho_0} \gamma (t_2 - \theta)$$

$$V'_1 - V_1 - (V_2 - V'_2) = 0 \quad (5)$$

deci

$$V_1 + V_2 = V'_1 + V'_2, \quad (6)$$

adică volumul nu se modifică după stabilirea echilibrului termic.

9.14. Un mol de gaz monoatomic aflat inițial la temperatura T_1 și presiunea p_1 se destinde după legea $T = aV - bV^2$. Să se determine variația energiei interne atunci cînd volumul său crește de 2 ori. Ce relație trebuie să existe între a și b pentru ca energia internă în starea finală să fie egală cu cea din starea inițială?

Soluție. Din ecuația de stare

$$p_1 V_1 = \nu R T_1 \quad (1)$$

deducem

$$V_1 = \frac{\nu R T_1}{p_1} \quad (2)$$

$$V_2 = 2V_1 = \frac{2\nu R T_1}{p_1} \quad (3)$$

Avem

$$dT = (a - 2bV) dV \quad (4)$$

$$dU = \frac{3}{2} \nu R dT = \frac{3}{2} \nu R (a - 2bV) dV. \quad (5)$$

Variația energiei interne este

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \int_{V_1}^{V_2} (a - 2bV) dV \quad (6)$$

sau

$$\Delta U = \frac{3}{2} \frac{R^2 T_1}{p_1} \left(a - 3b \frac{RT_1}{p_1} \right). \quad (7)$$

Condiția $\Delta U = 0$ este îndeplinită dacă

$$\frac{a}{b} = \frac{3RT_1}{p_1}. \quad (8)$$

9.15. Să se arate că adiabata unui gaz perfect descrește *mai repede* decât izoterma corespunzătoare.

Soluție. Ecuațiile adiabatei, respectiv izotermei, sînt

$$pV^\gamma = C_1 \quad (1)$$

$$pV = C_2 \quad (2)$$

unde C_1 și C_2 sînt constante. Avem

$$\left(\frac{dp}{dV} \right)_a = -\frac{\gamma p}{V} \quad (3)$$

$$\left(\frac{dp}{dV} \right)_i = -\frac{p}{V}. \quad (4)$$

Întrucît

$$\left| \left(\frac{dp}{dV} \right)_a \right| > \left| \left(\frac{dp}{dV} \right)_i \right| \quad (5)$$

rezultă că adiabata descrește mai repede decât izoterma.

9.16. Un cilindru închis la ambele capete conține un gaz oarecare și este împărțit în două părți de un piston (fig. 9.16). Masele de gaz sînt aceleași în ambele compartimente. Știind că la temperatura T (aceeași în ambele părți) avem $V_1/V_2 = n$, se cere ce devine acest raport la temperatura T' (aceeași pentru ambele părți). *Discuție.*

Soluție. Fie p_1, p_2 și p'_1, p'_2 presiunea gazului în părțile 1 și 2 la cele două temperaturi. Avem

$$p_2 - p_1 = p'_2 - p'_1 \quad (1)$$

$$V_1 + V_2 = V'_1 + V'_2 \quad (2)$$

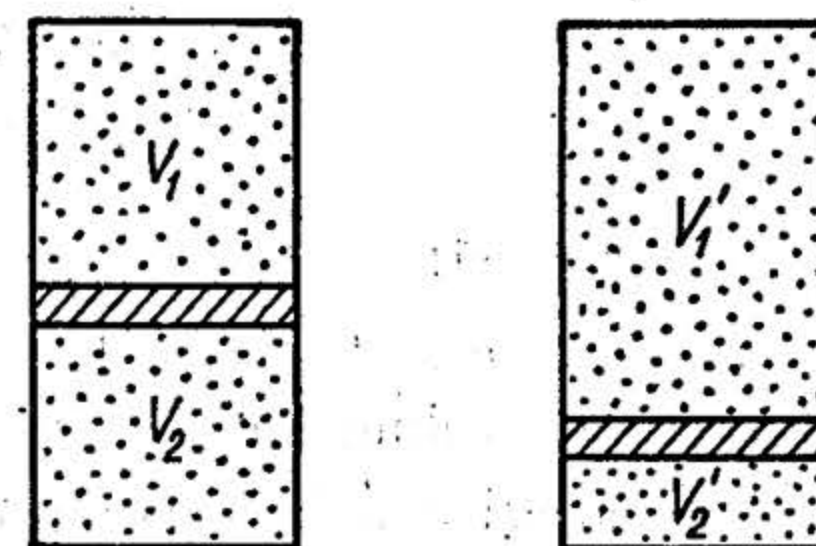


Fig. 9.16

respectiv

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (3)$$

$$p'_1 V'_1 = p'_2 V'_2. \quad (4)$$

Notînd $V'_1/V'_2 = x$ avem

$$\frac{p_2}{p_1} = n \quad (5)$$

$$\frac{p'_2}{p'_1} = x \quad (6)$$

de unde

$$p_1(n-1) = p'_1(x-1) \quad (7)$$

$$V_1 \left(1 + \frac{1}{n} \right) = V'_1 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad (8)$$

adică

$$p_1 V_1 (n-1) \left(1 + \frac{1}{n} \right) = p'_1 V'_1 (x-1) \left(1 + \frac{1}{x} \right). \quad (9)$$

Știind că

$$\frac{p_1 V_1}{T} = \frac{p_1 V_1'}{T'} \quad (10)$$

avem în final

$$\frac{T}{T'} \cdot \frac{n^2 - 1}{n} = \frac{x^2 - 1}{x} \quad (11)$$

sau

$$x^2 + \frac{x}{n} \cdot \frac{T}{T'} (1 - n^2) - 1 = 0; \quad (12)$$

Se observă că:

a) dacă $n = 1 \Rightarrow x = 1$, adică greutatea pistonului se neglijează și raportul volumelor rămâne același;

b) aceeași concluzie rezultă pentru $n > 1$ și $T' \rightarrow \infty$;

c) Dacă $n > 1$, iar temperatura T' nu este foarte mare, greutatea pistonului nu se mai poate neglija. În acest caz, avem

$$x = \frac{n^2 - 1}{2nT'} \cdot T + \sqrt{1 + \frac{T^2}{T'^2} \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{4n^2}} \quad (13)$$

9.17. O masă m de gaz, cu masa moleculară M , este închis într-un corp de pompă, având la o anumită temperatură presiunea p_1 și volumul V_1 . Fiind încălzit, parametrii gazului devin p_2 și V_2 . Se cere temperatura *maximă* la care a fost încălzit gazul, dacă presiunea depinde de volum conform relației: $p = b - aV$.

Soluție. Avem

$$p = b - aV \quad (1)$$

$$pV = \frac{m}{M} RT \quad (2)$$

de unde

$$MaV^2 - MbV + mRT = 0. \quad (3)$$

Conform teoriei extremului trinomialului de gradul II, dacă $T = T_{max}$, se verifică relația*)

$$M^2 b^2 - 4MamRT = 0 \quad (4)$$

de unde

$$T_{max} = \frac{Mb^2}{4amR} \quad (5)$$

Constantele a și b se deduc din (1), punind succesiv $p = p_1$, $p = p_2$, $V = V_1$, $V = V_2$. Se obține

$$a = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} \quad (6)$$

$$b = \frac{p_2 V_1 - p_1 V_2}{V_1 - V_2} \quad (7)$$

deci

$$T_{max} = \frac{M(p_2 V_1 - p_1 V_2)^2}{4mR(V_1 - V_2)(p_2 - p_1)} \quad (8)$$

9.18. Se dă un cilindru deschis la ambele capete, de secțiune S , ce conține două pistoane legate printr-un fir (fig. 9.18). Presiunea inițială în cele 3 compartimente este p_1 iar temperatura T_1 . Gazul din compartimentul închis este încălzit izobar până la o anumită temperatură. Se cere această temperatură *maximă* dacă firul rezistă până la tensiunea T .

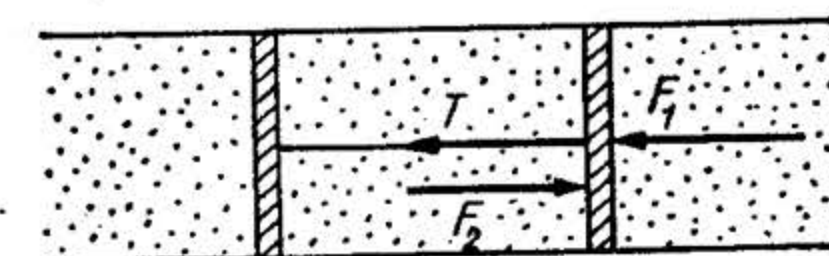


Fig. 9.18

Soluție. Fie p_2 presiunea corespunzătoare temperaturii cerute. Avem

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_{max}}{T_1} \quad (1)$$

de unde

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{T_{max}}{T_1} \quad (2)$$

*) Relația (4) poate fi dedusă prin intersecția dreptei $p = b - aV$, în coordonate Clapeyron (p , V), cu o familie de izoterme.

Forțele ce acționează asupra pistonului sînt

$$F_1 = p_1 S \quad (3)$$

$$F_2 = p_2 S = p_1 S \cdot \frac{T_{max}}{T_1}$$

Echilibrul forțelor se scrie

$$F_2 = F_1 + T \quad (4)$$

sau

$$p_1 S \cdot \frac{T_{max}}{T_1} = p_1 S \pm T \quad (5)$$

de unde

$$T_{max} = \frac{p_1 S \pm T}{p_1 S} T_1 \quad (6)$$

X. ELECTROSTATICĂ

10.1. Se dau sarcinile electrice Q_1 și Q_2 ($Q_1 > Q_2$) așezate la capetele segmentului $AB = l$ (fig. 10.1). Să se determine poziția de echilibru a sarcinii de probă pentru cazurile cînd cele două sarcini sînt de același semn și respectiv de semne contrare.

Soluție. În ambele situații, sarcina de probă (+1) se află în echilibru dacă

$$E_1 + E_2 = 0 \quad (1)$$

unde E_1 și E_2 sînt intensitățile cîmpurilor electrostatice create de sarcinile Q_1 și Q_2 în punctul de echilibru.

a) Presupunem că ambele sarcini sînt pozitive. În acest caz, poziția de echilibru se află între sarcini, mai aproape de sarcina mai mică. Fie x distanța de echilibru față de prima sarcină. Intensitățile cîmpurilor celor două sarcini vor fi

$$E_1 = 9 \cdot 10^9 \frac{Q_1}{\epsilon_r x^2} \quad (2)$$

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{Q_2}{\epsilon_r (l - x)^2} \quad (3)$$

Din egalitatea modulelor lor rezultă

$$x_{1,2} = \frac{l(Q_1 \pm \sqrt{Q_1 Q_2})}{Q_1 - Q_2} \quad (4)$$

Intrucît $0 < x < l$ și

$$\frac{Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2}}{Q_1 - Q_2} > 1 \quad (5)$$

convine numai rădăcina cu minus în fața radicalului.

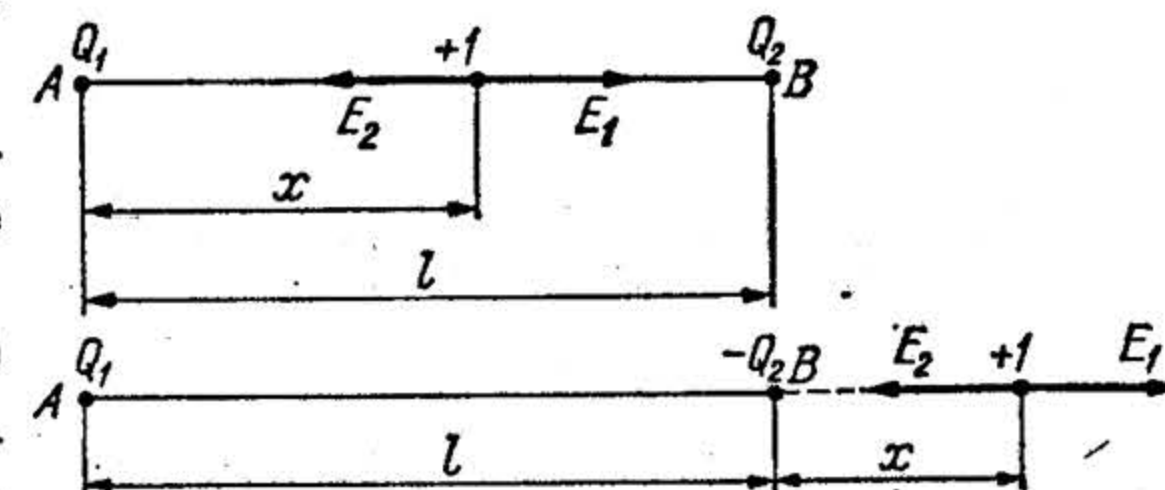


Fig. 10.1

b) Presupunem că $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$. În acest caz, câmpul electrostatic total se anulează numai în afara sarcinilor electrice, de partea sarcinii mai mici. Avem

$$E_1 = \frac{9 \cdot 10^9 Q_1}{\epsilon_r (l+x)^2} \quad (6)$$

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{Q_2}{\epsilon_r x^2} \quad (7)$$

Din $E_1 = E_2$ deducem poziția de echilibru cerută

$$x = \frac{l(Q_2 + \sqrt{Q_1 Q_2})}{Q_1 - Q_2} \quad (8)$$

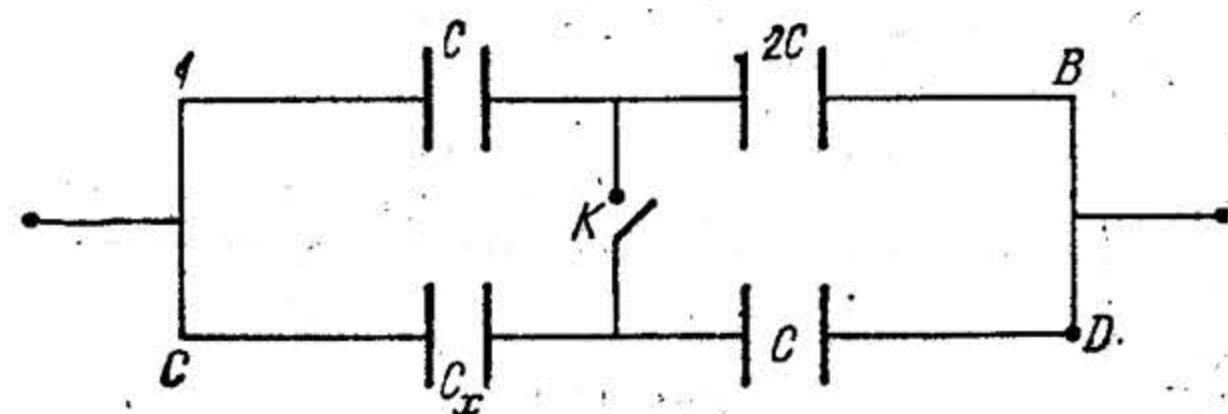


Fig. 10.2

10.2. Se dă bateria de condensatoare din fig. 10.2, în care se știe că închiderea sau deschiderea întrerupătorului nu modifică capacitatea totală a bateriei.

Se cere valoarea capacității C_x care îndeplinește această condiție.

Soluție. Cînd întrerupătorul e deschis, ramurile AB și CD sînt legate în paralel. Avem

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{2C} \quad (1)$$

de unde

$$C_{AB} = \frac{2C}{3} \quad (2)$$

Analog avem

$$C_{CD} = \frac{CC_x}{C + C_x} \quad (3)$$

Capacitatea totală în primul caz va fi

$$C_I = C_{AB} + C_{CD} = \frac{2C}{3} + \frac{CC_x}{C + C_x} \quad (4)$$

Cînd întrerupătorul este închis, ochiurile AKCA și KBCK sînt legate în serie. Deci

$$C_{AKCA} = C + C_x \quad (5)$$

$$C_{KBCK} = 3C \quad (6)$$

Capacitatea totală în al doilea caz va fi

$$C_{II} = \frac{3C(C + C_x)}{C_x + 4C} \quad (7)$$

Din $C_I = C_{II}$ avem

$$4C_x^2 - 4CC_x + C^2 = 0 \quad (8)$$

$$C_x = \frac{C}{2} \quad (9)$$

10.3. În focarele unei elipse cu semi-axa mare a și cu excentricitatea e , se plasează sarcinile Q_1 și Q_2 . Să se determine poziția de minim pe elipsă a potențialului sistemului de sarcini și valoarea acestui potențial (fig. 10.3).

Aplicație pentru $a = 2$ m; $e = 0,5$; $Q_1 = 4$ mC; $Q_2 = 1$ mC.

Soluție. Se știe că

$$r_1 = a - ex \quad (1)$$

$$r_2 = a + ex.$$

Potențialul creat în $M(x)$ de prima sarcină, are valoarea

$$V_1 = 9 \cdot 10^9 \frac{Q_1}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{8}{4-x} \quad (2)$$

Potențialul creat de cea de a doua sarcină, în același punct, este

$$V_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{Q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \frac{2}{4+x} \quad (3)$$

Potențialul total în punctul considerat este

$$V = V_1 + V_2 = 18 \cdot 10^9 \left(\frac{4}{4-x} + \frac{1}{4+x} \right) \quad (4)$$

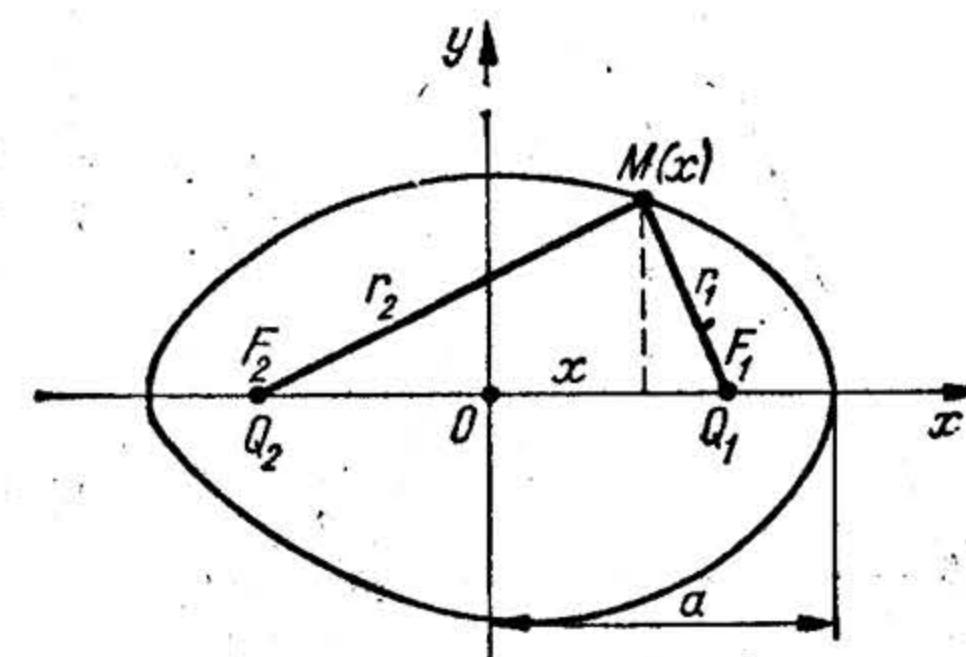


Fig. 10.3

Derivata potențialului total are valoarea

$$\frac{dV}{dx} = 18 \cdot 10^6 \left(\frac{3x^2 + 40x + 48}{(16 - x^2)^2} \right) \quad (5)$$

de aici

$$[x]_{V=V_{\min}} = -\frac{4}{3} \text{ m} \quad (6)$$

$$V_{\min} = 2,1 \cdot 10^7 \text{ V.} \quad (7)$$

10.4. Două sfere identice, cu masele $m_1 = m_2 = m = 0,1 \text{ g}$, sînt suspendate în același punct de două fire inextensibile, de lungime $l_1 = l_2 = l = 20 \text{ cm}$. Sferele, aflate în aer, se încarcă cu sarcini egale și de același semn. Se cere valoarea uneia din sarcini astfel încît, după respingere, firele să fie perpendiculare? ($\epsilon_r = 1$; $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.)

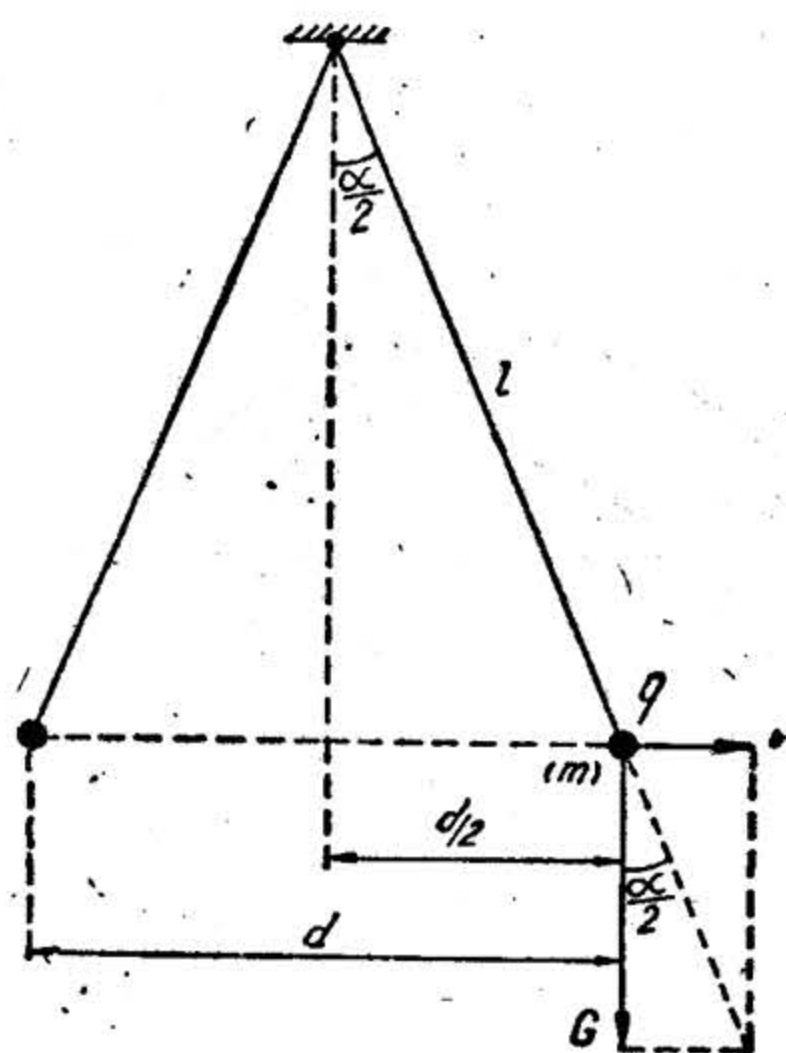


Fig. 10.4

Soluție. (fig. 10.4). Forța de interacțiune dintre sarcini are valoarea

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \quad (1)$$

Mai avem relațiile

$$G = mg \quad (2)$$

$$F = G \tan \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

$$d = 2l \sin \frac{\alpha}{2} \quad (4)$$

Utilizînd aceste relații, valoarea cerută a sarcinii electrice va fi

$$q = 2l \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \tan \frac{\alpha}{2}} \quad (5)$$

de unde $q = 9,3 \cdot 10^{-8} \text{ C}$.

10.5. Un inel de rază R este uniform încărcat cu sarcina totală Q . Să se determine punctul de pe perpendiculara dusă prin centrul inelului pe planul acestuia unde intensitatea cîmpului electrostatic creat este maximă și să se calculeze această intensitate ($\epsilon_r = 1$), (fig. 10.5).

Soluție. Fie A acest punct. Sarcina elementară dQ produce în punctul A un cîmp de intensitate

$$dE = 9 \cdot 10^9 \frac{dQ}{AB^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{dQ}{d^2 + R^2} \quad (1)$$

care se descompune în componentele

$$dE' = dE \cos \alpha = 9 \cdot 10^9 \frac{dQ \cos \alpha}{d^2 + R^2} \quad (2)$$

$$dE'' = 9 \cdot 10^9 \frac{dQ \sin \alpha}{d^2 + R^2} \quad (3)$$

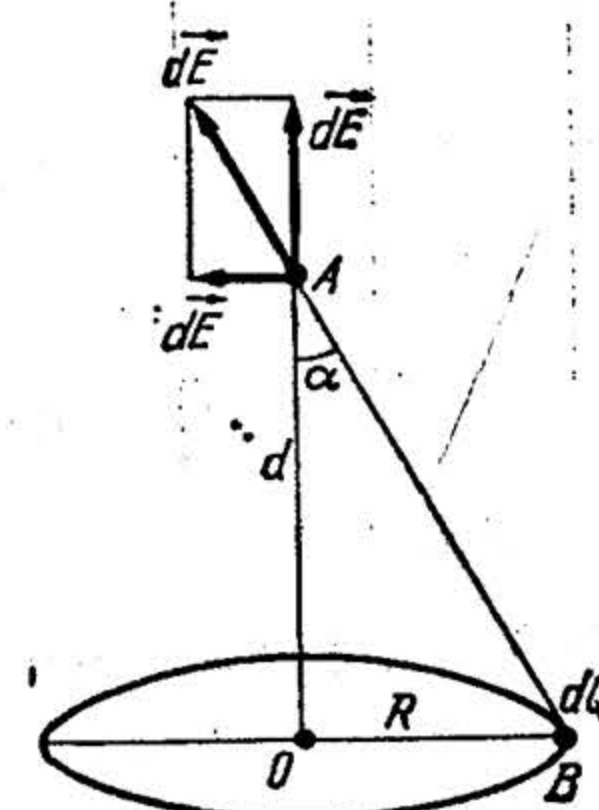


Fig. 10.5

Din motive de simetrie, rezultanta $\sum dE'' = 0$.

Cîmpul total produs în punctul A va fi

$$E = \int_0^Q \frac{9 \cdot 10^9 \cos \alpha}{d^2 + R^2} dQ = \frac{9 \cdot 10^9 Q}{R^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad (4)$$

Derivăm această valoare

$$\frac{dE}{d\alpha} = \frac{9 \cdot 10^9 Q \sin \alpha}{R^2} (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (5)$$

Rezultă

$$[\alpha]_{E=E_{\max}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow E_{\max} = 2\sqrt{3} \cdot 10^9 \frac{Q}{R^2} \quad (6)$$

10.6. O particulă încărcată negativ se află între plăcile unui condensator plan (fig. 10.6) aflate sub tensiunea U și depărtate la distanța d . Lungimea unei plăci este l . Să se afle sarcina specifică maximă a particulei pentru ca ea să traverseze spațiul dintre plăci.

Soluție. Sarcina specifică este q/m , unde q este sarcina particulei, iar m masa sa. În absența cîmpului, particula cade liber în timpul

$$t_c = \sqrt{\frac{2l}{g}} \quad (1)$$

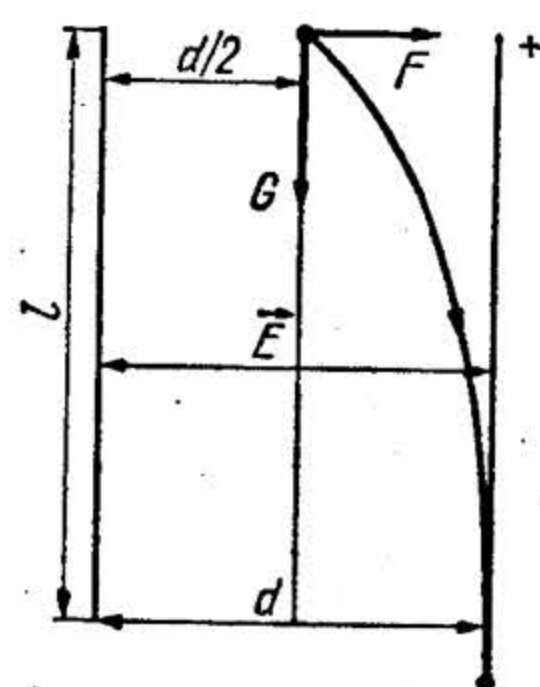


Fig. 10.6

Distanța $d/2$ este parcursă în timpul dat de relația

$$\frac{d}{2} = \frac{at^2}{2} = \frac{qUt^2}{2md} \quad (5)$$

de unde

$$t = \sqrt{\frac{md^2}{qU}} \quad (6)$$

Particula iese dintre plăci dacă $t \leq t_c$; în caz contrar se depune pe placa pozitivă. Avem

$$\frac{2l}{g} = \frac{md^2}{qU} \quad (7)$$

de unde

$$\left(\frac{q}{m}\right)_{\max} = \frac{gd^2}{2Ul} \quad (8)$$

10.7. Capacitățile a 3 condensatoare (fig. 10.7) sînt *proporționale* cu numerele k_1, k_2, k_3 ($k_1 < k_2 < k_3$); legate în paralel, acestea au capacitatea echivalentă C_p . Cu aceste condensatoare se alcătuiește un nou

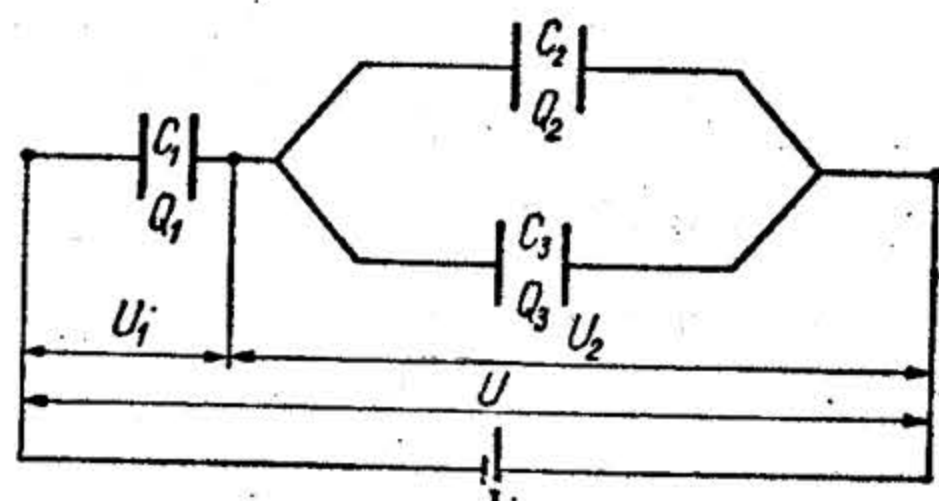


Fig. 10.7

montaj, în care condensatorul cu capacitatea *cea mai mică* este legat în serie cu celelalte două în paralel. Montajul e supus tensiunii U . Să se determine tensiunile fiecărui condensator, respectiv sarcina electrică, și să se verifice.

Soluție. Fie C_1, C_2, C_3 cele 3 capacități. Avem

$$\frac{C_1}{k_1} = \frac{C_2}{k_2} = \frac{C_3}{k_3} \quad (1)$$

$$\frac{C_1 + C_2 + C_3}{k_1 + k_2 + k_3} = \frac{C_p}{k_1 + k_2 + k_3} = \frac{C_1}{k_1} = \frac{C_2}{k_2} = \frac{C_3}{k_3} \quad (2)$$

de unde

$$C_1 = \frac{k_1 C_p}{k_1 + k_2 + k_3} \quad (3)$$

$$C_2 = \frac{k_2 C_p}{k_1 + k_2 + k_3} \quad (3)$$

$$C_3 = \frac{k_3 C_p}{k_1 + k_2 + k_3}$$

Cea mai mică capacitate este C_1 .

Capacitatea noului montaj este dată de relația

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{C_1(C_2 + C_3)} \quad (4)$$

sau

$$C = \frac{k_1(k_2 + k_3)}{(k_1 + k_2 + k_3)^2} C_p \quad (5)$$

Sarcina totală a bateriei de condensatoare este

$$Q = Q_1 = \frac{k_1(k_2 + k_3)U}{(k_1 + k_2 + k_3)^2} C_p \quad (6)$$

Tensiunea repartizată primului condensator va fi

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{k_2 + k_3}{k_1 + k_2 + k_3} U \quad (7)$$

Pentru grupul de condensatoare în paralel rămîne tensiunea

$$U_2 = \frac{Q}{C_2 + C_3} = \frac{k_1 U}{k_1 + k_2 + k_3} \quad (8)$$

deci sarcinile pe celelalte două condensatoare vor fi

$$Q_2 = C_2 U_2 = \frac{k_1 k_2 U C_p}{(k_1 + k_2 + k_3)^2} \quad (9)$$

$$Q_3 = C_3 U_2 = \frac{k_1 k_3 U C_p}{(k_1 + k_2 + k_3)^2} \quad (10)$$

Pentru verificare se poate observa că

$$U_1 + U_2 = U \quad (11)$$

$$Q = Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (12)$$

10.8. Două corpuri identice au sarcinile Q_1 și Q_2 de același semn și se află la distanța d . Este se ating și apoi se resping la aceeași distanță. Care forță de interacțiune este mai mare?

Soluție. Înainte de atingere, forța de respingere este

$$F = \frac{9 \cdot 10^9 Q_1 Q_2}{\epsilon_r d^2} \quad (1)$$

După atingere, fiecare corp se încarcă cu sarcinile

$$Q'_1 = Q'_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \quad (2)$$

deci noua forță de respingere este

$$F' = \frac{9 \cdot 10^9 (Q_1 + Q_2)^2}{4 \epsilon_r d^2} \quad (3)$$

sau

$$F' = \frac{9 \cdot 10^9}{4 \epsilon_r d^2} (Q_1^2 + 2Q_1 Q_2 + Q_2^2) \quad (4)$$

Se poate arăta că

$$\frac{Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_1 Q_2}{4} > Q_1 Q_2 \quad (5)$$

de unde $F' > F$.

10.9. Un fir de lungime finită l este încărcat uniform cu densitatea liniară de sarcină τ . Să se precizeze condițiile în care firul dat se comportă:

- ca un fir de lungime infinită;
- ca o sarcină punctiformă.

Soluție. Câmpul unui fir electrizat, de lungime finită, are expresia

$$E = 1,8 \cdot 10^{10} \frac{\tau \cdot \sin \alpha}{\epsilon_r d} \quad (1)$$

unde d este distanța dintre punctul de calcul și fir (fig. 10.9). Avem

$$\sin \alpha = \frac{l}{2 \sqrt{d^2 + \frac{l^2}{4}}} \quad (2)$$

Deci

$$E = \frac{9 \cdot 10^9 \tau l}{\epsilon_r d \sqrt{d^2 + \frac{l^2}{4}}} \quad (3)$$

Se observă că:

a) dacă $d \ll l$, avem:

$$E = 1,8 \cdot 10^{10} \frac{\tau}{\epsilon_r d} \quad (4)$$

relație ce ne dă câmpul unui fir infinit, încărcat uniform;

b) dacă $d \gg l$, avem (știind că $\tau l = Q$)

$$E = \frac{9 \cdot 10^9 Q}{\epsilon_r d^2} \quad (5)$$

relație ce ne dă câmpul unei sarcini punctiforme $Q = \tau l$.

10.10. Se dau două sfere metalice de raze R_1 și R_2 din care prima e încărcată cu sarcina Q , iar a doua este neutră. Sferele se leagă între ele cu un fir metalic. Să se arate că condiția de egalitate a potențialelor sferelor după legare conduce la condiția existenței unei valori minime a energiei electrice a sistemului format de cele două sfere.

Soluție. Potențialele celor două sfere, după legare, sînt

$$V_1 = 9 \cdot 10^9 \frac{Q - x}{R_1} \quad (1)$$

$$V_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{x}{R_2} \quad (2)$$

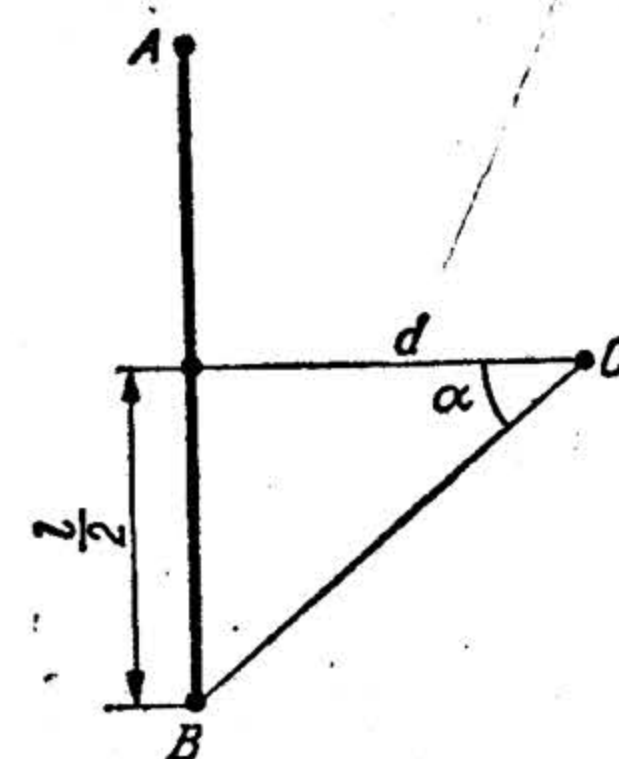


Fig. 10.9.

unde x este sarcina electrică ce a trecut de pe prima sferă pe a doua. Din $V_1 = V_2$ avem

$$x = \frac{QR_2}{R_1 + R_2}. \quad (3)$$

Energia electrică, după legare, a celor două sfere va fi

$$W_1 = \frac{(Q - x)^2}{2C_1} \quad (4)$$

$$W_2 = \frac{x^2}{2C_2} \quad (5)$$

adică

$$W = W_1 + W_2 = \frac{(Q - x)^2}{2C_1} + \frac{x^2}{2C_2} \quad (6)$$

unde C_1 și C_2 sînt capacitățile electrice ale sferelor de valori

$$C_1 = kR_1 \quad (7)$$

$$C_2 = kR_2 \quad (8)$$

unde k este o constantă.

Calculăm prima derivată a energiei electrice a sistemului în raport cu x și avem

$$\frac{dW}{dx} = \frac{x - Q}{C_1} + \frac{x}{C_2} \quad (9)$$

Din anularea ei, rezultă

$$x = \frac{QC_2}{C_1 + C_2} = \frac{QR_2}{R_1 + R_2}. \quad (10)$$

Calculînd a doua derivată

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (11)$$

ne convingem că energia trece printr-un *minim* pentru valoarea determinată a lui x , căci totdeauna

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} > 0. \quad (12)$$

10.11. Se dau două sarcini pozitive Q și nQ , cea de a doua fiind considerată fixă. Prima sarcină se află *foarte departe* de a doua și se îndreaptă spre aceasta cu viteza v . Știînd că masa sarcinii mobile este m , se cere distanța *minimă* pînă la care ea se poate apropia de sarcina fixă (fig. 10.11).

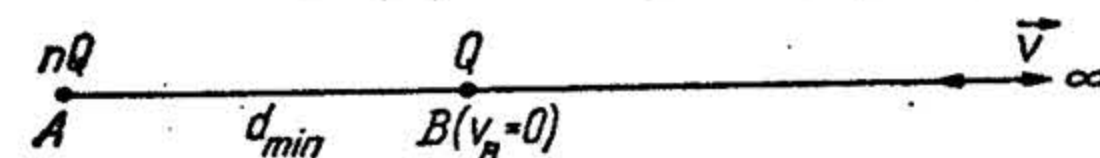


Fig. 10.11

Soluție. Fie V_B potențialul sarcinii fixe în punctul de maximă apropiere B . Avem

$$V_B = \frac{9 \cdot 10^9 nQ}{d_{min}} \quad (1)$$

Lucrul mecanic necesar aducerii sarcinii mobile de foarte departe pînă în B va fi

$$L = Q(V_B - V_\infty) = QV_B \quad (2)$$

sau

$$L = \frac{9 \cdot 10^9 nQ^2}{d_{min}} \quad (3)$$

Acest lucru mecanic este egal cu *variația* energiei cinetice a sarcinii mobile, adică

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = L. \quad (4)$$

Deoarece $v_B = 0$, rezultă

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{9 \cdot 10^9 nQ^2}{d_{min}} \quad (5)$$

de unde

$$d_{min} = \frac{1,8 \cdot 10^{10} nQ^2}{mv^2} \quad (6)$$

10.12. Se dă un pătrat cu latura a . În două din vîrfurile sale se plasează sarcini egale în modul cu Q , dar de semne contrare. Să se calculeze diferența de potențial dintre celelalte două vîrfuri, în toate cazurile posibile.

Soluție. Notînd cu Q_1 și Q_2 cele două sarcini, observăm că $|Q_1| = |Q_2| = |Q|$ dar putem avea $Q_1 \geq 0$ și $Q_2 \geq 0$. Sînt posibile următoarele situații:

Nr. crt.	Virful A	Virful B	Virful C	Virful D
1	$+Q_1$	$-Q_2$	—	—
2	$-Q_1$	$+Q_2$	—	—
3	$+Q_2$	$-Q_1$	—	—
4	$-Q_2$	$+Q_1$	—	—
5	$+Q_1$	—	$-Q_2$	—
6	$-Q_1$	—	$+Q_2$	—
7	$+Q_2$	—	$-Q_1$	—
8	$-Q_2$	—	$+Q_1$	—
9	$+Q_1$	—	—	$-Q_2$
10	$-Q_1$	—	—	$+Q_2$
11	$+Q_2$	—	—	$-Q_1$
12	$-Q_2$	—	—	$+Q_1$
13	—	$+Q_1$	$-Q_2$	—
14	—	$-Q_1$	$+Q_2$	—
15	—	$+Q_2$	$-Q_1$	—
16	—	$-Q_2$	$+Q_1$	—
17	—	$+Q_1$	—	$-Q_2$
18	—	$-Q_1$	—	$+Q_2$
19	—	$+Q_2$	—	$-Q_1$
20	—	$-Q_2$	—	$+Q_1$
21	—	—	$+Q_1$	$-Q_2$
22	—	—	$-Q_1$	$+Q_2$
23	—	—	$+Q_2$	$-Q_1$
24	—	—	$-Q_2$	$+Q_1$

Se analizează două din cazurile posibile:

a) Sarcinile sînt plasate în virfuri alăturate (fig. 10.12, a). Avem

$$V_{AC} = \frac{9 \cdot 10^9 Q}{a}$$

$$V_{BC} = -\frac{9 \cdot 10^9 Q}{a\sqrt{2}} = -\frac{9\sqrt{2} \cdot 10^9 Q}{2a} \quad (1)$$

deci

$$V_C = V_{AC} + V_{BC} = 9 \cdot 10^9 Q \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2a} \right). \quad (2)$$

Analog

$$V_{AD} = \frac{9 \cdot 10^9 Q}{a\sqrt{2}} = \frac{9 \cdot 10^9 \sqrt{2} Q}{2a}$$

$$V_{BD} = -\frac{9 \cdot 10^9 Q}{a}$$

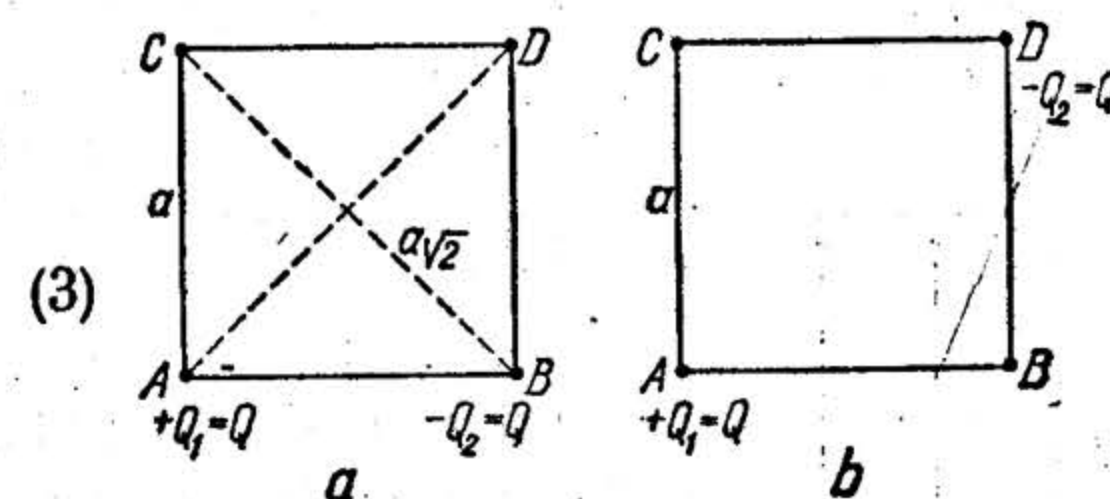


Fig. 10.12

deci

$$V_D = V_{AD} + V_{BD} = 9 \cdot 10^9 Q \left(\frac{\sqrt{2} - 2}{2a} \right). \quad (4)$$

Avem

$$U_{CD} = V_C - V_D = \frac{9 \cdot 10^9 Q}{a} (2 - \sqrt{2}). \quad (5)$$

b) Sarcinile sînt plasate în virfuri opuse (fig. 10.12, b).

Avem

$$V_{AB} = \frac{9 \cdot 10^9 Q}{a}$$

$$V_{DB} = -\frac{9 \cdot 10^9 Q}{a} \quad (6)$$

deci

$$V_B = V_{AB} + V_{DB} = 0. \quad (7)$$

Analog

$$V_{AC} = \frac{9 \cdot 10^9 Q}{a}$$

$$V_{DC} = -\frac{9 \cdot 10^9 Q}{a} \quad (8)$$

deci

$$V_C = V_{AC} + V_{DC} = 0. \quad (9)$$

Avem

$$U_{BC} = V_B - V_C = 0. \quad (10)$$

Rezultă că pentru toate cazurile de tipul a) tensiunea are valoarea dată de (5), fiind pozitivă sau negativă, iar pentru toate cazurile de tipul b) tensiunea este nulă.

10.13. Se dă o sarcină $+Q$, considerată fixă. Deasupra ei, la o înălțime h , se află o sarcină negativă, plasată pe un corp de masă m (fig. 10.13). Se cere valoarea sarcinii negative astfel încât ea să parcurgă distanța maximă de valoare kh ($k < 1$), la echilibru.

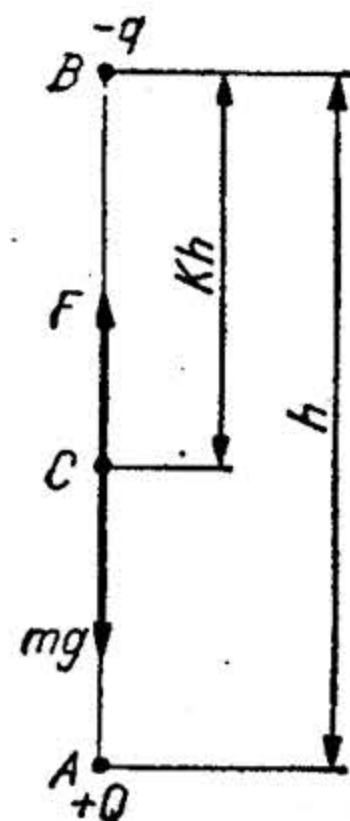


Fig. 10.13

Soluție. Sarcina superioară se deplasează pînă în punctul C unde greutatea este egalată de forța de respingere electrostatică, adică

$$mg = \frac{9 \cdot 10^9 Qq}{h^2(1-k)^2} \quad (1)$$

de unde

$$q = \frac{mgh^2(1-k)^2}{9 \cdot 10^9 Q} \quad (2)$$

10.14. Un pendul gravitațional de masă m și lungime l , încărcat cu sarcina electrică q , oscilează izocron într-un câmp electric vertical de intensitate E . Ce valori extreme are perioada de oscilație a pendulului?

Soluție. Perioada de oscilație a pendulului matematic este

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{a}} \quad (1)$$

unde a este accelerația produsă de rezultanta forțelor ce acționează asupra corpului pendulului.

Dacă câmpul are sensul gravitației, accelerația produsă de câmp, egală cu

$$a' = \frac{qE}{m} \quad (2)$$

se adaugă accelerației gravitaționale, astfel că

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg + qE}} \quad (3)$$

Dacă câmpul este orientat în sus, se obține

$$T_{\max} = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg - qE}} \quad (4)$$

10.15. Două sarcini pozitive Q_1 și Q_2 se află la baza, respectiv în vârful unui plan înclinat sub unghiul α și de înălțime h (fig. 10.15). Sarcina din vîrf, mobilă, începe să alunece spre baza planului. Coeficientul de frecare este μ , iar masa sarcinii mobile m . Se cer:

a) distanța, socotită de la vârful planului, la care sarcina mobilă începe să se miște uniform-rectiliniu.

b) viteza maximă atinsă de sarcina mobilă;

c) distanța maximă la care se îndepărtează sarcina mobilă de poziția sa inițială.

Aplicație pentru $\alpha = 30^\circ$; $\mu = 0,1$; $m = 1g$; $Q_1 = 8\mu C$; $Q_2 = 2\mu C$; $h = 4m$; $g \approx 10 m \cdot s^{-2}$

Soluție. a) Mai întii avem

$$AB = \frac{h}{\sin \alpha} = 8m. \quad (1)$$

Mișcarea uniform rectilinie presupune anularea accelerației de coborîre, condiție ce se obține cînd

$$G_t = F_r + F_c \quad (2)$$

sau

$$mg \sin \alpha = \mu mg \cos \alpha + \frac{9 \cdot 10^9 Q_1 Q_2}{(AB - d_1)^2} \quad (3)$$

rezultă $d_1 \approx 2m$ și $AB - d_1 = 6m$. Deci $DD' = h^1 = 3m$.

b) Accelerația mișcării de coborîre este variabilă, deci pentru calculul vitezei vom aplica legea conservării energiei în punctul D. Avem

$$(E_{pg})_B + (E_e)_B = (E_{pg})_D + (E_e)_D + \frac{mv_D^2}{2} + (L_r)_{BD} \quad (4)$$

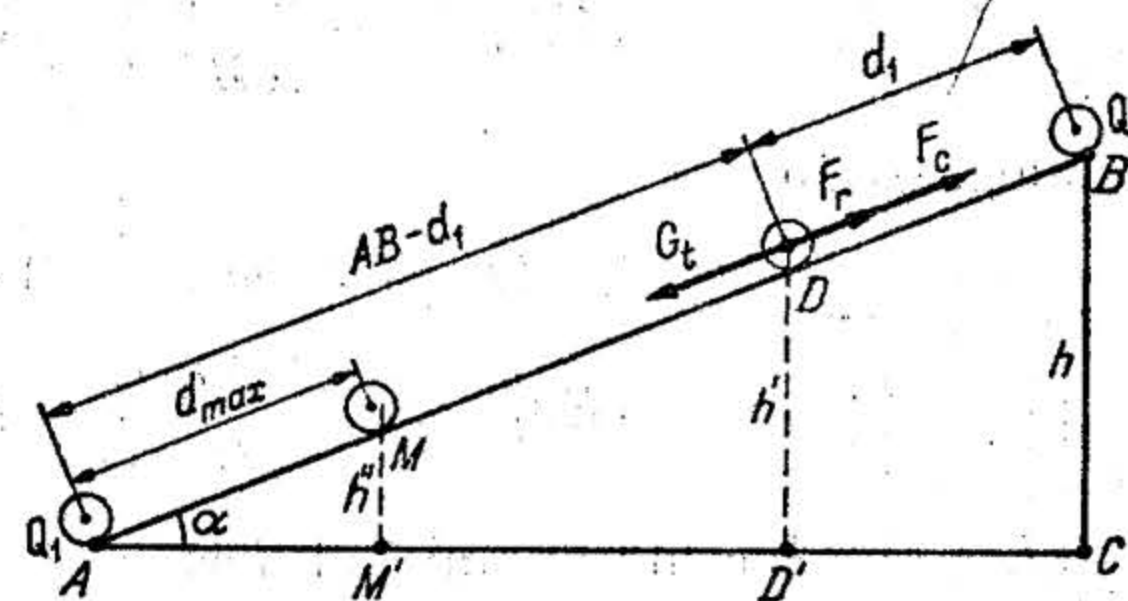


Fig. 10.15

unde:

$(E_{pg})_B$ — energia potențială gravitațională a corpului suport al sarcinii în punctul B , de valoare

$$(E_{pg})_B = mgh = 4 \cdot 10^{-2} \text{ J} \quad (5)$$

$(E_e)_B$ — energia de interacțiune electrostatică în punctul B , de valoare

$$(E_e)_B = \frac{9 \cdot 10^9 Q_1 Q_2}{AB} = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ J} \quad (6)$$

Analog, avem

$$(E_{pg})_D = mgh' = 3 \cdot 10^{-2} \text{ J} \quad (7)$$

$$(E_e)_D = \frac{9 \cdot 10^9 Q_1 Q_2}{AD} = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ J} \quad (8)$$

$(L_r)_{BD}$ — lucrul mecanic al forței de frecare pe distanța BD , de valoare

$$(L_r)_{BD} = \mu mgd_1 \cos \alpha = 0,173 \cdot 10^{-2} \text{ J} \quad (9)$$

Rezultă: $v_D = v_{\max} = 2,1 \text{ m/s}$.

c) Fie M punctul în care sarcina mobilă se oprește. Conservarea energiei ne dă

$$(E_{pg})_B + (E_e)_B = (E_{pg})_M + (E_e)_M + (L_r)_{BM} \quad (10)$$

unde

$$(E_{pg})_M = mgh'' = mgd_{\max} \sin \alpha = 0,5 \cdot 10^{-2} d_{\max} \text{ J} \quad (11)$$

$$(E_e)_M = \frac{9 \cdot 10^9 Q_1 Q_2}{d_{\max}} = \frac{14,4 \cdot 10^{-2}}{d_{\max}} \text{ J} \quad (12)$$

$$(L_r)_{BM} = \mu mg(8 - d_{\max}) \cos \alpha = 8,65 \cdot 10^{-4} (8 - d_{\max}) \text{ J} \quad (13)$$

Rezultă: $d_{\max} \approx 4,3 \text{ m}$.

XI. CURENTUL STAȚIONAR

11.1. Se dă circuitul din schema alăturată, în care se neglijează rezistențele interioare ale generatoarelor. Să se găsească condiția ca prin E_1 să nu circule curent electric și să se arate că această condiție este independentă de R_1 și R_4 (fig. 11.1).

Soluție. Aplicând legile lui Kirchhoff avem

$$I_1 R_1 + I_1 R_4 - I_2 R_2 = E_1 - E_2 \quad (1)$$

$$I_1 R_1 + I_1 R_4 + (I_1 + I_2) R_3 = E_1 \quad (2)$$

Dar $I_1 = 0$, deci

$$-I_2 R_2 = E_1 - E_2 \quad (3)$$

$$I_2 R_3 = E_1 \quad (4)$$

De aici

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{E_2 - E_1}{E_1} \quad (5)$$

sau

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{R_2 + R_3}{R_3} \quad (6)$$

care este condiția cerută (se observă că nu figurează rezistențele cerute în enunț).

11.2. Un generator electric are rezistența internă r și tensiunea electromotoare E . El debitează curent într-un rezistor exterior de rezistență R . Ce condiție trebuie să îndeplinească R pentru ca puterea lebitată să fie maximă?

Soluție. Din legea lui Ohm pentru întregul circuit deducem că intensitatea curentului va fi

$$I = \frac{E}{R + r} \quad (1)$$

iar puterea debitată

$$P = I^2 R = \frac{E^2 R}{R^2 + 2Rr + r^2}. \quad (2)$$

Pentru ca puterea electrică, dependentă de R , să treacă printr-un extrem, e necesar ca

$$\frac{dP}{dR} = 0 \quad (3)$$

sau

$$\frac{E^2(R^2 + 2Rr + r^2) - 2RE^2(R + r)}{(R + r)^2} = 0 \quad (4)$$

de unde

$$R = r \quad (5)$$

este condiția cerută de problemă.

11.3. Se dă generatorul din 11.2. În circuitul exterior cuplăm succesiv rezistențele R_1 și R_2 , curentul circulând în ambele cazuri în timpi *egali*. Ce condiție trebuie să îndeplinească R_1 , R_2 și r pentru ca bilanțul termic să fie *același* în ambele cazuri?

Soluție. Cantitatea de căldură produsă în primul caz este

$$Q_1 = \frac{E^2 R_1 t}{(R_1 + r)^2} \quad (1)$$

iar în al doilea

$$Q_2 = \frac{E^2 R_2 t}{(R_2 + r)^2}. \quad (2)$$

Dacă $Q_1 = Q_2$, avem

$$\frac{R_1}{R_1^2 + 2R_1r + r^2} = \frac{R_2}{R_2^2 + 2R_2r + r^2} \quad (3)$$

de unde

$$r = \sqrt{R_1 R_2} \quad (4)$$

este condiția cerută de problemă.

11.4. Într-un circuit de curent continuu se fac operațiile:

a) se leagă în serie rezistențele R_1 și R_2 ($R_1 < R_2$), obținându-se rezistența echivalentă R_s ;

— se leagă aceleași rezistențe în paralel, obținându-se rezistența echivalentă R_p ;

— se leagă în serie rezistențele R_1, R_2, \dots, R_n , obținându-se rezistența echivalentă R_{sn} ;

— se leagă în paralel aceleași rezistențe, obținându-se rezistența echivalentă R_{pn} . Se cere:

a) Să se arate că în primul caz rezistența echivalentă este *mai mare* decât *cea mai mare* dintre rezistențe.

b) În al doilea caz, rezistența echivalentă este *mai mică* decât *cea mai mică* dintre rezistențe.

c) Să se arate că $R_{sn}/R_{pn} > n^2$.

d) Cu ce condiție această inegalitate se transformă în egalitate?

Soluție. a) Avem

$$R_s = R_1 + R_2. \quad (1)$$

Intrucât $R_1 > 0$, evident că $R_s > R_2$.

b) Avem

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2)$$

sau

$$R_p = \frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}. \quad (3)$$

Deoarece

$$1 + \frac{R_1}{R_2} > 1 \quad (4)$$

avem: $R_p < R_1$.

c) Se știe că

$$R_{sn} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i \quad (5)$$

$$\frac{1}{R_{pn}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (6)$$

Inegalitatea devine

$$R_{sn} \cdot \frac{1}{R_{pn}} = \sum_{i=1}^n R_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} > n^2 \quad (7)$$

Facem notațiile:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{R_1}} &= a_1 \\ \frac{1}{\sqrt{R_2}} &= a_2 \\ &\vdots \\ \frac{1}{\sqrt{R_n}} &= a_n \end{aligned} \quad (8)$$

și

$$\begin{aligned} \sqrt{R_1} &= b_1 \\ \sqrt{R_2} &= b_2 \\ &\vdots \\ \sqrt{R_n} &= b_n \end{aligned} \quad (9)$$

Inegalitatea conduce la relația lui Buniakovski, care este adevărată.

d) Dacă

$$R_1 = R_2 = \dots = R_n = R \quad (10)$$

avem

$$R_{sn} = nR \quad (11)$$

$$\frac{1}{R_{pn}} = \frac{n}{R} \quad (12)$$

Rezultă

$$\frac{R_{sn}}{R_{pn}} = nR \cdot \frac{n}{R} = n^2 \quad (13)$$

11.5. Lungimea totală a firelor ce leagă un generator electric de consumator este l . Puterea generatorului este P , iar intensitatea curentului I . Să se determine diametrul astfel încât pierderile de putere pe fire să fie cel mult kP ($k < 1$).

Soluție. Pierderea de putere pe linie are valoarea

$$\Delta P = I^2 R \quad (1)$$

unde R este rezistența firelor de legătură și are mărimea

$$R = \frac{4l\rho}{\pi d^2} \quad (2)$$

unde ρ este rezistivitatea materialului firelor de diametru d . Deoarece

$$\Delta P = kP \quad (3)$$

avem

$$kP = \frac{4l\rho I^2}{\pi d^2} \quad (4)$$

de unde

$$d = 2I \sqrt{\frac{l\rho}{\pi kP}} \quad (5)$$

11.6. Se dă rețeaua din figură. Să se găsească o proprietate interesantă a acestei rețele (fig. 11.6).

Soluție. Avem

$$R_{AB} = R + R = 2R \quad (1)$$

$$\frac{1}{R_{ABQMA}} = \frac{2}{2R}$$

de unde

$$R_{ABQMA} = R$$

Ochiul $ABQMA$ este echivalent cu rezistența R , iar ochiurile $ACKNA$ și $ADLPA$ au aceeași rezistență.

Dacă rețeaua se dezvoltă, ca în figură, pe n ochiuri, rezistența echivalentă rămâne R .

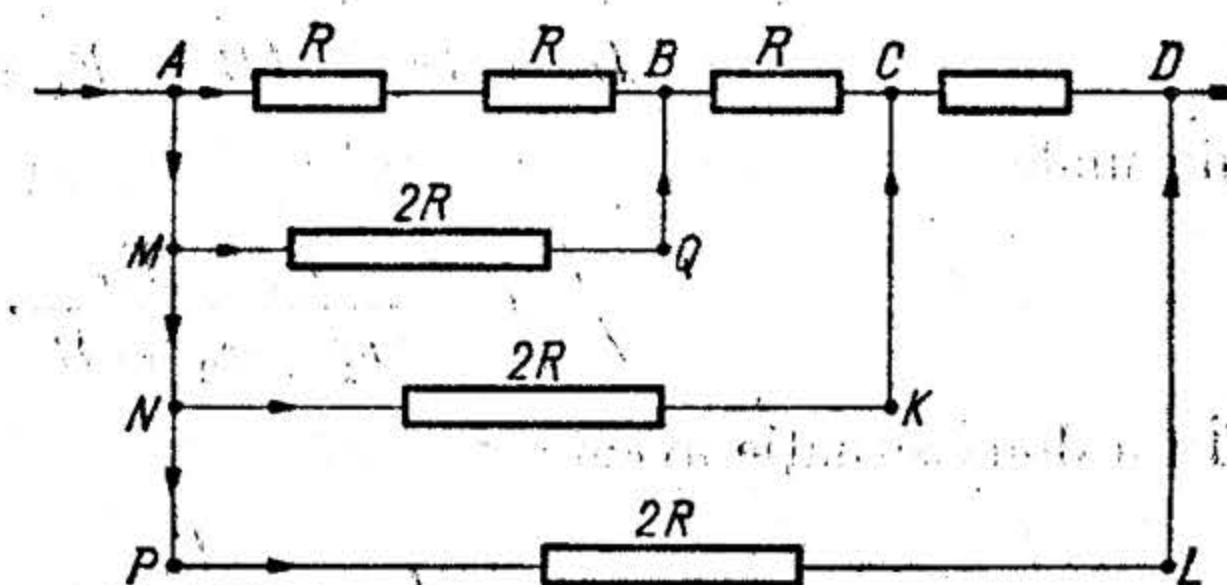


Fig. 11.6

11.7. Se dau N elemente identice (toate au aceeași t.e.m. E și aceeași rezistență internă r). Elementele se leagă câte n în serie, iar apoi grupele formate se leagă în paralel (m grupe). Ce condiție trebuie să îndeplinească n pentru ca intensitatea curentului debitată în exterior, pe rezistența R , să fie maximă (fig. 11.7).

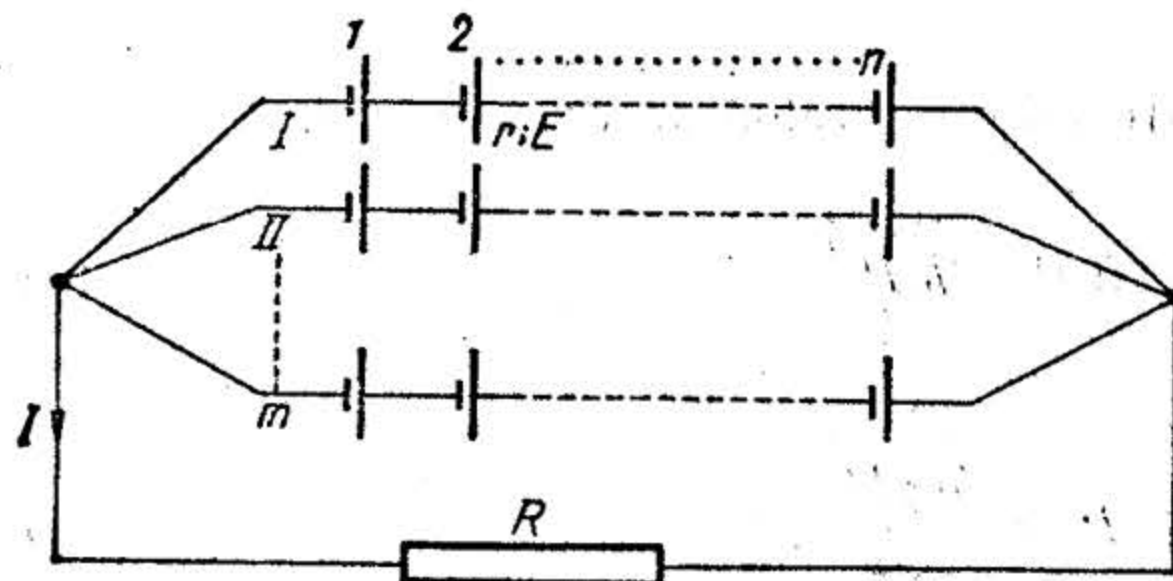


Fig. 11.7

Soluție. Se observă că $mn = N$. (1)

Intensitatea curentului este

$$I = \frac{nNE}{NR + n^2r}. \quad (2)$$

Derivata intensității în raport cu n este

$$\frac{dI}{dn} = \frac{NE(NR + n^2r) - 2n^2rEN}{(NR + n^2r)^2}. \quad (3)$$

Din anularea derivatei obținem condiția cerută

$$n = \sqrt{\frac{NR}{r}}. \quad (4)$$

11.8. Două surse cu t.e.m. E_1 și E_2 și cu rezistențele interne r_1 și r_2 se leagă în serie și apoi la rezistența externă R . În felul acesta se obține curentul cu intensitatea I . Se decuplează a doua sursă, obținându-se astfel curentul I_1 . Cu ce condiție avem $I < I_1$?

Soluție. În cazul cuplării ambelor surse, avem (conform legii a II-a a lui Kirchhoff)

$$Ir_1 + Ir_2 + IR = E_1 + E_2 \quad (1)$$

de unde

$$I = \frac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2 + R}. \quad (2)$$

În a doua situație avem

$$I_1 = \frac{E_1}{r_1 + R}. \quad (3)$$

Pentru a avea

$$\frac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2 + R} < \frac{E_1}{r_1 + R} \quad (4)$$

este necesar ca

$$\frac{E_2}{r_2} < \frac{E_1}{r_1 + R} \quad (5)$$

care e condiția cerută.

11.9. a) Un generator are t.e.m. egală cu E și rezistența internă r . Se cere valoarea intensității curentului pentru care puterea din circuitul exterior este maximă, precum și valoarea acestei puteri.

b) Dându-se în plus puterea P din circuitul exterior (altă decât cea precedentă), să se calculeze în funcție de aceste 3 elemente valoarea intensității curentului în noua situație, tensiunea la borne, rezistența externă și randamentul generatorului și să se observe condiția de posibilitate a problemei.

Soluție. a) Avem

$$P = EI - I^2r \quad (1)$$

$$\frac{dP}{dI} = E - 2Ir. \quad (2)$$

Egalizînd cu zero această derivată, obținem

$$[I]_{P=P_{max}} = \frac{E}{2r} \quad (3)$$

$$P_{max} = \frac{E^2}{4r}. \quad (4)$$

b) Din ecuația

$$I^2r - EI + P = 0 \quad (5)$$

avem

$$I_{1,2} = \frac{E \pm \sqrt{E^2 - 4Pr}}{2r}. \quad (6)$$

De asemenea

$$U = E - Ir \quad (7)$$

deci

$$U_{1,2} = \frac{E \mp \sqrt{E^2 - 4Pr}}{2} \quad (8)$$

Asemănător

$$R = \frac{U}{I} = r \frac{E \mp \sqrt{E^2 - 4Pr}}{E \pm \sqrt{E^2 - 4Pr}} \quad (9)$$

$$\eta = \frac{U}{E} = \frac{E \mp \sqrt{E^2 - 4Pr}}{2E}$$

Se observă că e necesar ca $E > 2\sqrt{Pr}$, care este condiția impusă de problemă.

11.10. Se dă schema din fig. 11.10, în care sînt cunoscute valorile lui R_1, R_2, E, r . Se știe că puterea debitată de sursă este *maximă*. Să se calculeze cea de a treia rezistență evidențiindu-se *condiția* de posibilitate a problemei.

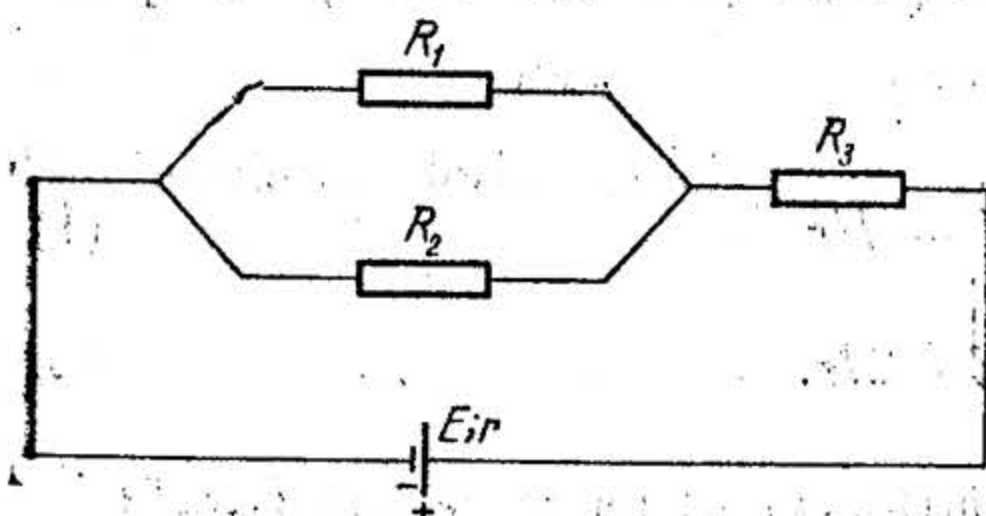


Fig. 11.10

de unde

$$R_3 = \frac{r(R_1 + R_2) - R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2)$$

Este necesar ca

$$r > \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (3)$$

care reprezintă *condiția* cerută de problemă.

11.11. Se dă circuitul din figură în care se știe că $R_1 = n_1 R_2$ și $C_1 = n_2 C_2$ ($n_1 > n_2 > 1$). Tensiunea la borne are valoarea U . Se consideră situațiile:

a) ambele întrerupătoare sînt închise;

b) primul întrerupător este închis, al doilea deschis;

c) primul întrerupător este deschis, al doilea închis.

Cunoscînd valorile R_1 și C_1 , să se așeze în ordinea *crescătoare* valorile sarcinii electrice de pe condensatoare.

Soluție. a) În acest caz, intensitatea curentului prin rezistențe va fi

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U}{R_1(n_1 + 1)} \quad (1)$$

Tensiunile la care sînt supuse condensatoarele sînt

$$U_1 = IR_1 = \frac{U}{n_1 + 1} \quad (2)$$

$$U_2 = IR_2 = \frac{U}{n_1(n_1 + 1)} \quad (3)$$

iar sarcinile electrice

$$Q_1 = C_1 U_1 = \frac{C_1 U}{n_1 + 1} \quad (4)$$

$$Q_2 = C_2 U_2 = \frac{C_1 U}{n_1 n_2 (n_1 + 1)} \quad (5)$$

b) În acest caz, cele două condensatoare sînt legate în serie, deci au capacitatea rezultantă

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{n_2 + 1} \quad (6)$$

Sarcinile electrice ale condensatoarelor sînt egale între ele

$$Q_1 = Q_2 = CU = \frac{C_1 U}{n_2 + 1} \quad (7)$$

c) În acest caz primul condensator suportă întreaga tensiune, deci avem

$$Q_1'' = C_1 U$$

$$Q_2'' = 0$$

Se poate arăta că sarcinile electrice formează șirul crescător Q_1, Q_1', Q_1'' , respectiv Q_2'', Q_2, Q_2' .

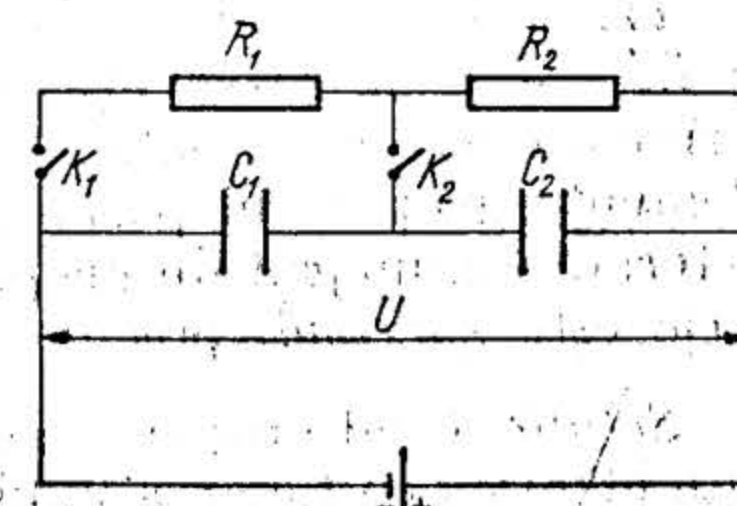


Fig. 11.11

11.12. Un circuit este format din n_1 surse identice de t.e.m. egală cu E fiecare și de rezistență internă r . Din acest număr de elemente se formează n_2 grupe serie, în fiecare grupă existind același număr de elemente grupate în paralel. Circuitul exterior are rezistența R . Să se determine numărul de grupe-serie pentru care puterea debitată de baterie este *maximă*, precum și valoarea acestei puteri *maxime*.

Soluție. Când grupăm mai multe elemente în paralel, t.e.m. a grupei este identică cu t.e.m. a unui singur element, în schimb rezistența totală internă a grupei are valoarea

$$r' = \frac{r}{k} \quad (1)$$

unde k este numărul de elemente legate în paralel în grupă. Deoarece $k_1 = n_1/n_2$, avem

$$r' = \frac{rn_2}{n_1} \quad (2)$$

Curentul principal debitat de baterie va avea intensitatea

$$I = \frac{n_2 E}{R + \frac{rn_2}{n_1}} = \frac{n_1 n_2 E}{n_1 R + n_2 r} \quad (3)$$

ar puterea debitată va fi

$$P = I^2 R = \frac{n_1^2 \cdot n_2^2 \cdot E^2 R}{(n_1 R + n_2 r)^2} \quad (4)$$

Derivăm puterea în raport cu n_2 , o anulăm și obținem

$$n_2 \left|_{P=P_{\max}} = \sqrt{\frac{n_1 R}{r}} \quad (5)$$

Puterea debitată maximă va fi

$$P_{\max} = \frac{n_1 E^2}{4r} \quad (6)$$

11.13. O sursă electrică cu tensiunea la borne constantă alimentează un încălzitor electric în care pot fi introduse n rezistențe. Aceeași cantitate de apă poate fi încălzită cu același număr de grade în timpii

t_1, t_2, \dots, t_n dacă rezistențele sînt introduse, succesiv, în lichid. (Din acești timpi, t_1 este *cel mai mic*.) Rezistențele sînt introduse:

a) simultan, cuplate în serie;

b) simultan, cuplate în paralel, obținindu-se același efect termic. Să se arate că dintre toți timpii de încălzire, cel necesar în cazul b) este *cel mai mic*.

Soluție. Fie U tensiunea de la bornele rezistenței și R_1, R_2, \dots, R_n valorile rezistențelor utilizate. Folosind, pe rînd, rezistențele considerate, se degajă cantitățile de căldură

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{U^2}{R_1} t_1 \\ Q_2 &= \frac{U^2}{R_2} t_2 \\ &\vdots \\ Q_n &= \frac{U^2}{R_n} t_n \end{aligned} \quad (1)$$

Deoarece $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q$, avem

$$\frac{t_1}{R_1} = \frac{t_2}{R_2} = \dots = \frac{t_n}{R_n} \quad (2)$$

Dacă rezistențele se introduc simultan, grupate în serie, în apă, căldura degajată este

$$Q = \frac{U^2}{R} t_s \quad (3)$$

unde

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (4)$$

iar t_s este timpul de încălzire necesar la cuplarea în serie. Formînd proporții derivate, din (2) și (4), avem

$$t_s = t_1 + t_2 + \dots + t_n \quad (5)$$

Analog obținem

$$\frac{1}{t_p} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \quad (6)$$

Limitându-ne la două rezistențe, avem

$$t_p = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{t_1}{1 + \frac{t_1}{t_2}}$$

Se observă că $t_p < t_1$, adică timpul de încălzire necesar în cazul cuplării simultane în paralel este cel mai mic dintre toți timpii considerați sau calculați.

11.14. Un cablu de sîrmă circular de rază r este cuplat în punctele A și B la o sursă de curent (fig. 11.14). Să se determine poziția celor două puncte astfel ca rezistența circuitului exterior să fie maximă.

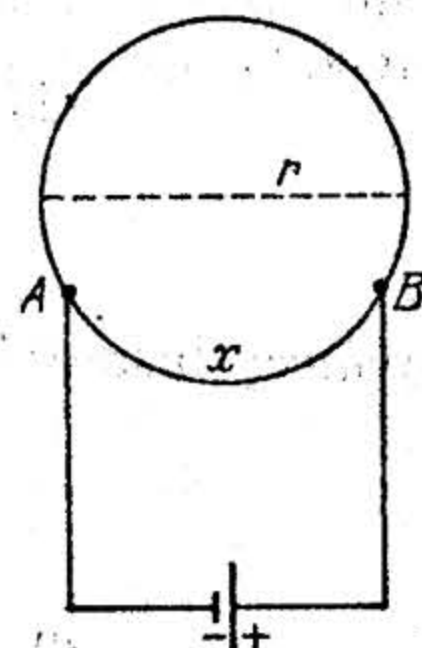


Fig. 11.14

Soluție. Fie R rezistența cablului necuplat. Unitatea de lungime din cablu va avea rezistența

$$R' = \frac{R}{2\pi r} \quad (1)$$

Rezistența arcului AB , de lungime x , va fi

$$R_{AB} = \frac{Rx}{2\pi r} \quad (2)$$

iar a porțiunii rămase

$$R'_{AB} = \frac{R(2\pi r - x)}{2\pi r} \quad (3)$$

Rezistențele R_{AB} și R'_{AB} sînt legate în paralel, deci au rezistența echivalentă

$$R_e = \frac{R_{AB} \cdot R'_{AB}}{R_{AB} + R'_{AB}} = \frac{Rx(2\pi r - x)}{4\pi^2 r^2} \quad (4)$$

Derivăm rezistența echivalentă în raport cu x , o anulăm și obținem

$$x \Big|_{R_e = R_{e \max}} = \pi r \quad (5)$$

Deci, punctele A și B trebuie să fie extremitățile unui diametru.

11.15. Se dă schema din fig. 11.15. Se cere valoarea rezistenței exterioare pentru care puterea electrică în circuitul exterior este maximă. (Se consideră $r = 1 \Omega$.)

Soluție. Legile lui Kirchhoff ne dau

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= E_1 - E_2 \\ I_1 + RI_R &= E_1 \\ I_1 &= I_2 + I_R \end{aligned} \quad (1)$$

Din acest sistem rezultă

$$I_R = \frac{E_1 + E_2}{1 + 2R} \quad (2)$$

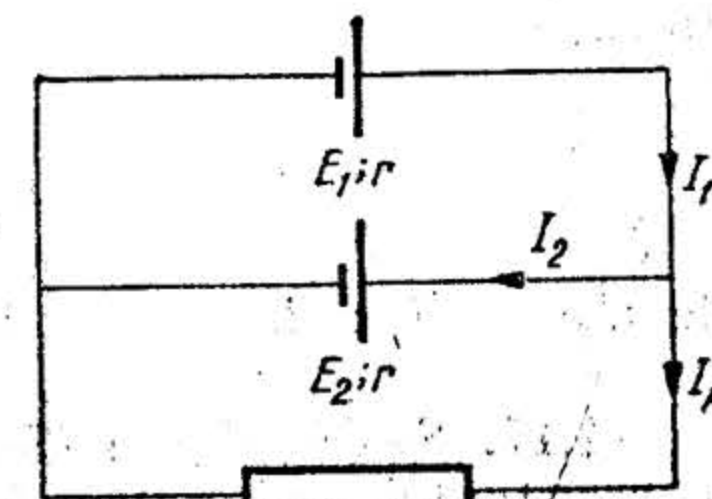


Fig. 11.15

Deci, puterea debitată pe circuitul exterior are valoarea

$$P = I_R^2 R = \left(\frac{E_1 + E_2}{1 + 2R} \right)^2 R \quad (3)$$

Se derivează puterea în raport cu rezistența exterioară și se anulează. Rezultă

$$\frac{dP}{dR} = \left[\frac{E_1 + E_2}{(1 + 2R)^2} \right]^2 [1 + 4R + 4R^2 - 4R(1 + 2R)] = 0; \quad (4)$$

de aici avem

$$R \Big|_{P=P_{\max}} = \frac{1}{2} \quad (5)$$

11.16. Se dau mai multe rezistențe ale căror valori formează progresia aritmetică $n + 1; n + 2; n + 3; \dots; 2n - 1; 2n$. Rezistențele se leagă în paralel. Să se arate că rezistența echivalentă este mai mică decît 2, indiferent de valoarea lui n .

Soluție. Avem

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (1)$$

sau

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \quad (2)$$

Știind că

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2} \quad (3)$$

Rezultă

$$\frac{1}{R} > \frac{1}{2} \quad (4)$$

de unde: $R < 2$.

11.17. Se dă schema electrică din fig. 11.17. Se cere valoarea *minimă* a rezistenței voltmetrului astfel încât variația relativă a tensiunii dintre punctele A și B după decuplarea aparatului să fie cel mult de $k\%$. (Rezistențele R_1 și R_2 se presupun date.)

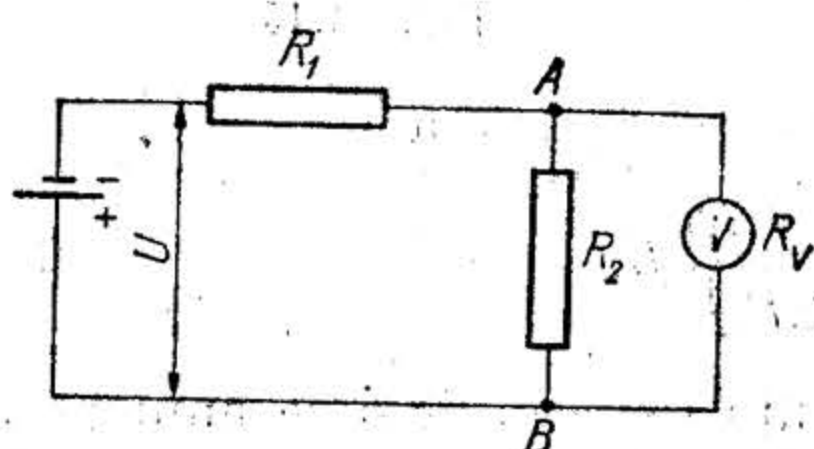


Fig. 11.17

Soluție. În absența aparatului, avem

$$U_2 = I_2 R_2 \quad (1)$$

unde

$$I_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad (2)$$

În prezența aparatului, avem

$$U_2 = I_2' \cdot \frac{R_2 R_v}{R_2 + R_v} \quad (3)$$

unde

$$I_2' = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R_v}{R_2 + R_v}} \quad (4)$$

Conform textului, rezultă

$$\frac{U_2 - U_2'}{U_2} \leq \frac{k}{100} \quad (5)$$

sau

$$\frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{R_{v \min}}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_{v \min}} \cdot \left(1 + \frac{k}{100}\right) \quad (6)$$

de unde:

$$R_{v \min} = \frac{100 R_1 R_2}{k(R_1 + R_2)} \quad (7)$$

11.18. Se dă schema electrică din fig. 11.18. în care se presupun cunoscute r , R_1 și R_2 . Se cere valoarea *maximă* a rezistenței ampermetrului astfel ca variația relativă a intensității curentului prin a doua rezistență să fie cel mult de $k\%$.

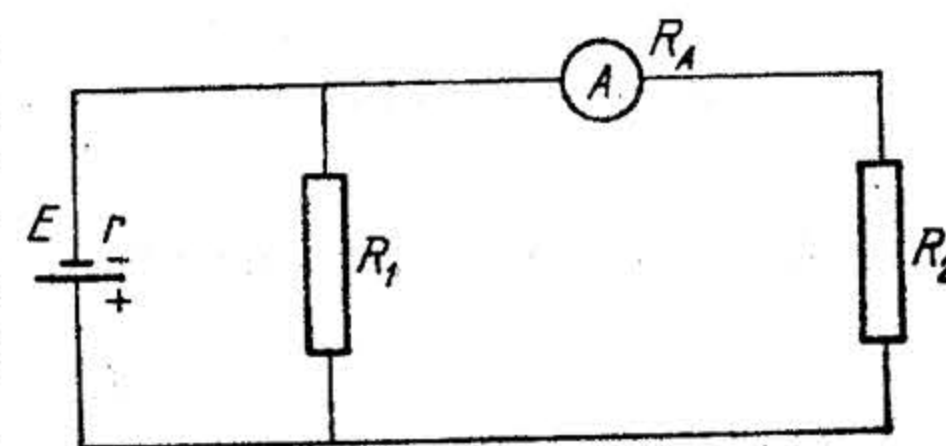


Fig. 11.18

Soluție. Înainte de introducerea ampermetrului în circuit, intensitatea curentului principal are valoarea

$$I = \frac{E}{r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (1)$$

Curentul care trece prin a doua rezistență este dat de legile lui Kirchhoff

$$I_2 = \frac{E R_1}{r(R_1 + R_2) + R_1 R_2} \quad (2)$$

După cuplarea ampermetrului, curentul principal are intensitatea

$$I' = \frac{E}{r + \frac{R_1(R_2 + R_A)}{R_1 + R_2 + R_A}} \quad (3)$$

iar curentul care trece prin R_2 este

$$I_2' = \frac{E R_1}{R_1(R_2 + R_A) + r(R_1 + R_2 + R_A)} \quad (4)$$

Din condiția impusă de problemă

$$\frac{E R_1}{R_1 R_2 + r(R_1 + R_2)} \left(\frac{100 - k}{100} \right) = \frac{E R_1}{R_1(R_2 + R_{A \max}) + r(R_1 + R_2 + R_{A \max})} \quad (5)$$

deducem

$$R_{A \max} = \frac{k}{100 - k} \cdot \frac{r(R_1 + R_2) + R_1 R_2}{R_1 + r} \quad (6)$$

11.19. O sursă de curent are t.e.m. de valoare E și rezistența r . Circuitul exterior are rezistența R . Să se reprezinte grafic, în funcție

de intensitatea curentului, tensiunea la borne, puterea totală a sursei, puterea utilă și randamentul sursei, evidențiindu-se *extremele* acestor mărimi.

Soluție. Intensitatea curentului are valoarea

$$I = \frac{E}{R+r} \quad (1)$$

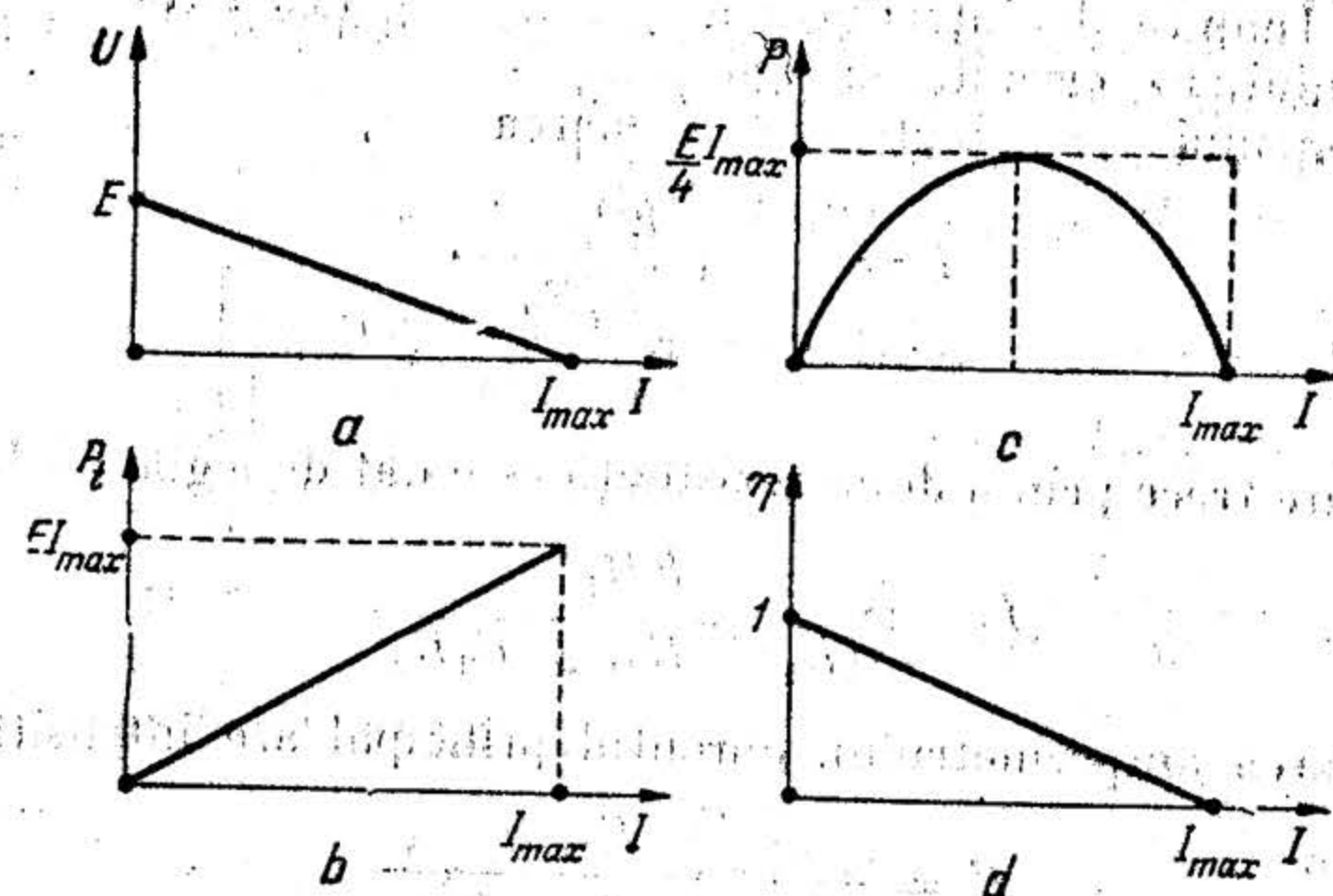


Fig. 11.19

și variază între limitele

$$I_{\min} = 0 \quad (2)$$

$$I_{\max} = I \Big|_{R=0} = \frac{E}{r} \quad (3)$$

corespunzător scurtcircuitului.

Tensiunea la borne are expresia

$$U = E - Ir = E \left(1 - \frac{I}{I_{\max}} \right) \quad (4)$$

și variază între limitele

$$U_{\min} = 0 \quad (5)$$

la scurtcircuit și

$$U_{\max} = E \quad (6)$$

în circuit deschis (fig. 11.19,a).

Puterea totală a sursei este

$$P_t = EI \quad (7)$$

și variază între limitele

$$P_{t \min} = 0 \quad (8)$$

$$P_{t \max} = EI_{\max} = \frac{E^2}{r} \quad (9)$$

Graficul corespunzător este graficul b).

Puterea utilă sau puterea rezervată exclusiv circuitului exterior are valoarea

$$P = UI = EI \left(1 - \frac{I}{I_{\max}} \right) \quad (10)$$

și variază între limitele

$$P_{\min} = 0 \quad (11)$$

$$P_{\max} = P \Big|_{I = \frac{I_{\max}}{2}} = \frac{E^2}{4r} \quad (12)$$

Graficul corespunzător este graficul c).

Randamentul sursei are formula

$$\eta = \frac{P}{P_t} = 1 - \frac{I}{I_{\max}} \quad (13)$$

și variază între limitele

$$\eta_{\max} = 1, \quad (14)$$

corespunzător circuitului deschis și

$$\eta_{\min} = 0 \quad (15)$$

corespunzător scurtcircuitului (fig. d).

11.20. Se dă sursa din problema precedentă. Se cer aceleași grafice, în funcție de rezistența R a circuitului exterior.

Soluție. Mărimile I , U , P_t , η , calculate în funcție de E , R , r au valorile

$$I = \frac{E}{R+r}; \quad (1)$$

$$U = \frac{ER}{R+r}; \quad (2)$$

$$P_t = \frac{E^2}{R+r}; \quad (3) \quad P = \left(\frac{E}{R+r} \right)^2 R; \quad (4) \quad \eta = \frac{R}{R+r}. \quad (5)$$

Graficele mărimilor cerute sînt, în ordine, graficele a), b), c), d), e), (fig. 11.20).

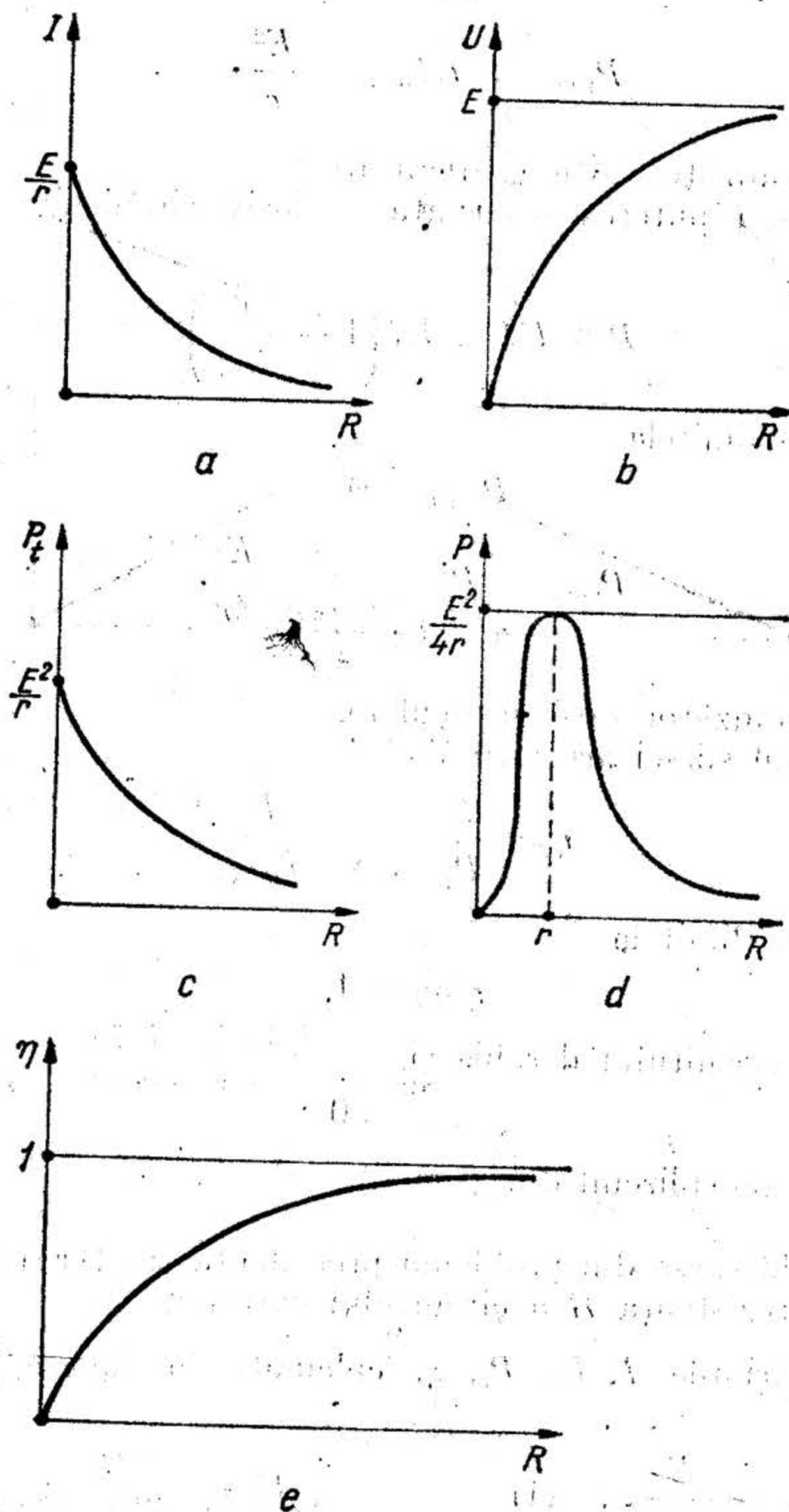


Fig. 11.20

XII. ELECTROMAGNETISM

12.1. Se dă un circuit general serie de curent alternativ. Se cere:
a) Pentru ce valoare a frecvenței de alimentare valoarea impedenței circuitului este *minimă*?

b) Ce valoare are această impedanță?

c) Ce valoare are în acest caz intensitatea curentului?

Soluție. a) Impedanța circuitului general serie are valoarea

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C} \right)^2}. \quad (1)$$

Avem

$$\frac{dZ}{d\nu} = \frac{\left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C} \right) \frac{d}{d\nu} \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C} \right)}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C} \right)^2}}. \quad (2)$$

Din anularea derivatei rezultă

$$2\pi\nu L = \frac{1}{2\pi\nu C} \quad (3)$$

de unde

$$\nu \Big|_{Z=Z_{\min}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (4)$$

b) Introducînd valoarea (4) în (1), avem

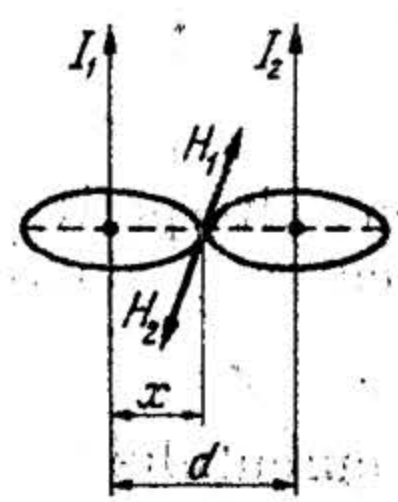
$$Z_{\min} = R. \quad (5)$$

c) Intensitatea curentului trece prin *maximul* de valoare

$$I_{\max} = \frac{U}{R} \quad (6)$$

unde U este tensiunea de alimentare.

12.2. Se dau două conductoare paralele, situate în vid la distanța d , prin care circulă curenți cu intensitățile I_1 și I_2 ($I_1 > I_2$). Să se afle poziția de *anulare* a câmpului magnetic total creat de cele două conductoare pentru cazul când sensul de circulație a curenților e același în ambele conductoare, respectiv diferit (fig. 12.2).



Soluție. În primul caz, câmpul total se anulează în spațiul dintre conductoare. Avem

$$H_1 = H_2 \quad (1)$$

sau

$$\frac{I_1}{2\pi x} = \frac{I_2}{2\pi(d-x)} \quad (2)$$

de unde

$$x \Big|_{H=0} = \frac{I_1 d}{I_1 + I_2} \quad (3)$$

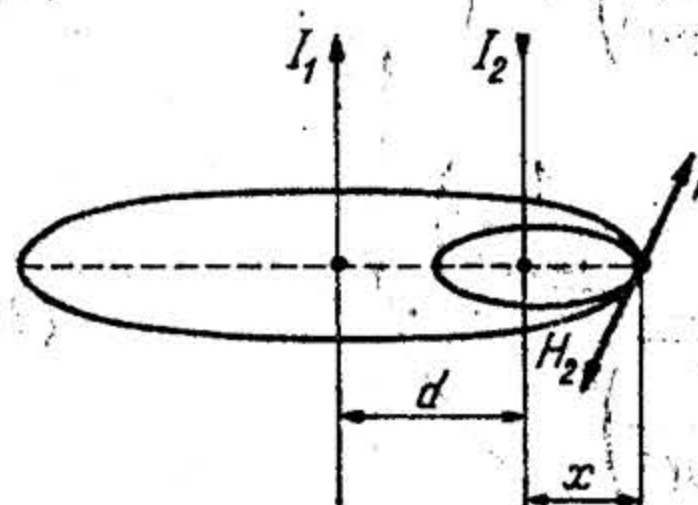


Fig. 12.2.

În al doilea caz, câmpul total se anulează în spațiul din afara conductoarelor, de partea conductorului cu intensitatea mai mică. Avem

$$\frac{I_1}{2\pi(d+x)} = \frac{I_2}{2\pi x} \quad (4)$$

de unde

$$x \Big|_{H=0} = \frac{I_1 d}{I_1 - I_2} \quad (5)$$

12.3. Curba de magnetizare a fierului este descrisă de permeabilitatea magnetică absolută $\mu \sim \frac{1}{H} \cdot e^{\frac{H}{a+bH}}$, unde H este intensitatea câmpului magnetic exterior, iar a și b constante pozitive. Să se stabilească domeniul de valori ale lui b , pentru care permeabilitatea are valori *extreme*.

Soluție. Calculăm:

$$\frac{d\mu}{dH} = \frac{\left(e^{\frac{H}{a+bH}} \right)' H - e^{\frac{H}{a+bH}}}{H^2} \quad (1)$$

Din anularea derivatei avem

$$b^2 H^2 + (2ab - a) + a^2 = 0 \quad (2)$$

de unde

$$H_{1,2} = \frac{a - 2ab \pm a\sqrt{1 - 4b}}{2b^2} \quad (3)$$

E necesar ca $1 - 4b > 0$, de unde

$$0 < b < \frac{1}{4} \quad (4)$$

12.4. Două conductoare rectilinii și perpendiculare, plasate în aer, sînt parcurse de curenți de aceeași intensitate I . Între ce limite este cuprinsă inducția magnetică rezultantă, într-un punct aflat la distanța d pe prima bisectoare a unghiului format de conductoare (fig. 12.4).

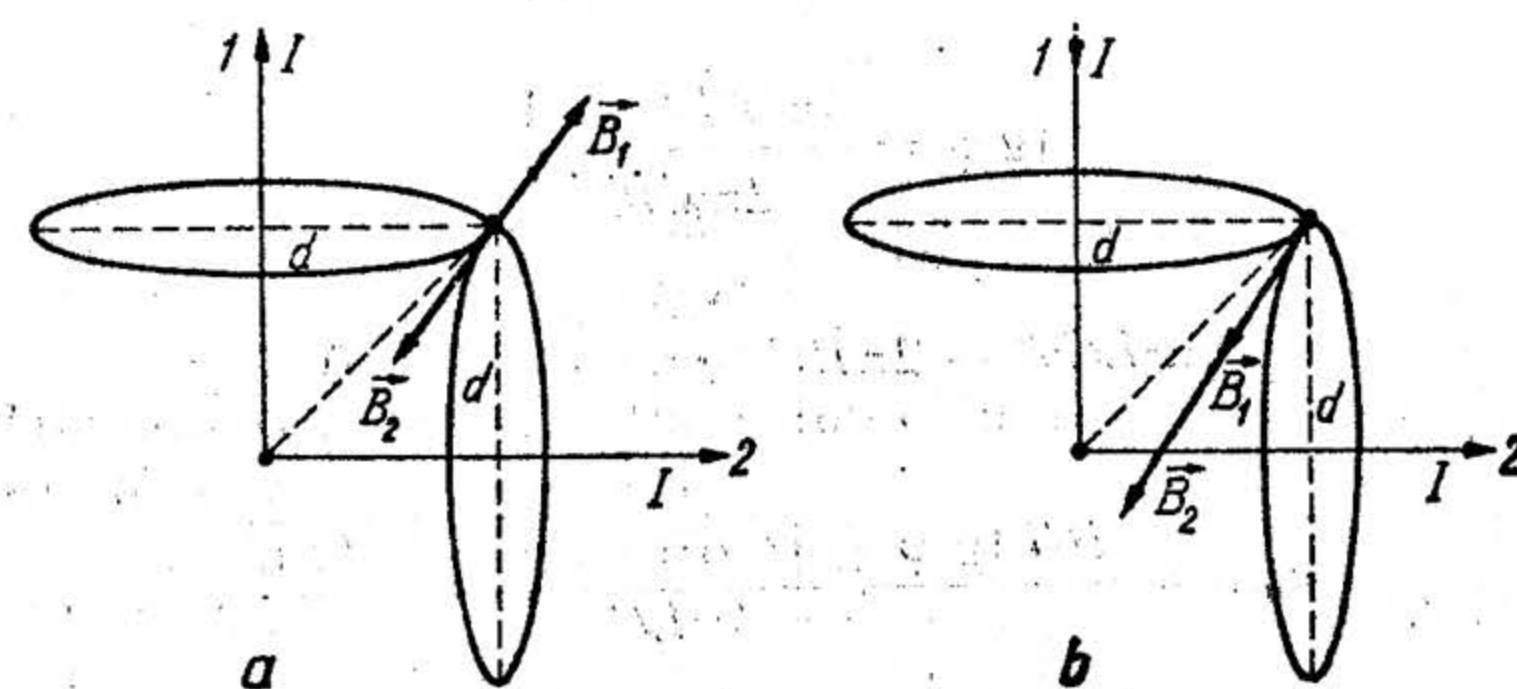


Fig. 12.4

Soluție. Sînt posibile două cazuri:

a) Cei doi curenți pleacă din punctul de intersecție (fig. 12.4,a). Inducțiile câmpurilor create sînt egale în modul

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \quad (1)$$

Conform figurii, avem

$$B_{\min} = B_1 - B_2 = 0 \quad (2)$$

b) Unul din curenți pleacă din origine, celălalt sosește în origine (fig. 12.4,b). Avem

$$B_{\max} = B_1 + B_2 = 2B_1 \quad (3)$$

sau

$$B_{max} = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \quad (4)$$

Celelalte două cazuri posibile (ambii curenți sosesc în origine, curentul 1, pleacă din origine și curentul 2 sosește în origine) se reduce, în esență, la cazurile a), respectiv b).

12.5. Un circuit RLC serie este alimentat de un generator de tensiune alternativă de frecvență variabilă. Să se determine valorile *extreme* ale frecvenței dacă unghiul de defazaj dintre intensitate și tensiune este φ .

Soluție. Avem

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega^2 LC - 1}{R\omega C} \quad (1)$$

sau

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4\pi^2 \nu^2 LC - 1}{2\pi \nu RC} \quad (2)$$

sau

$$4\pi^2 LC \nu^2 - 2\pi RC \operatorname{tg} \varphi \cdot \nu - 1 = 0 \quad (3)$$

de unde

$$\nu_{max} = \frac{RC \operatorname{tg} \varphi + \sqrt{R^2 C^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + 4LC}}{4\pi LC} \quad (4)$$

$$\nu_{min} = \frac{RC \operatorname{tg} \varphi - \sqrt{R^2 C^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + 4LC}}{4\pi LC} \quad (5)$$

12.6. Un circuit serie este format dintr-un condensator cu $C = 318 \text{ nF}$ și un solenoid cu $l = 0,1 \text{ m}$, aria secțiunii transversale $S = 10^{-4} \text{ m}^2$ și $N = 300$ spire, care are un miez cu permeabilitatea μ . La bornele circuitului se aplică o tensiune alternativă sinusoidală cu $U_{max} = \text{const.}$ La frecvența $\nu = 10 \text{ kHz}$, intensitatea efectivă a curentului atinge o valoare *maximă* atunci când miezul ocupă *jumătate* din volumul interior al solenoidului. Intensitatea efectivă a curentului când miezul ocupă *complet* volumul interior al solenoidului este de 5 ori mai mică decât valoarea maximă a intensității efective la aceeași frecvență. Presupunând că miezul rămâne la jumătatea solenoidului și că frecvența variază, se cere:

a) să se determine μ_r a miezului;

b) să se calculeze frecvențele ν_1 și ν_2 pentru care puterea activă a circuitului este jumătatea puterii active *maxime*;

c) să se demonstreze că raportul dintre frecvența de *rezonanță* și diferența $\nu_2 - \nu_1$ este egală cu factorul de supratensiune.

Soluție. a) Fluxul magnetic total al bobinei este

$$\Phi = \frac{NS}{2} \mu_0 H + \frac{NS}{2} \mu_r H = \frac{NS\mu_0}{2} (1 + \mu_r) \frac{NI}{l} \quad (1)$$

de unde

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{1 + \mu_r}{2} \cdot \frac{N^2 S}{l} \quad (2)$$

Știind că

$$I_{max} = I \Big|_{L\omega = 1/C\omega} \quad (3)$$

avem

$$\mu_r = \frac{2l}{\mu_0 N^2 S C \omega^2} - 1 = 12,9. \quad (4)$$

b) Dacă miezul ocupă total volumul interior al solenoidului, reactanța totală a circuitului va fi

$$X_L = L\omega - \frac{1}{C\omega} = \mu_0 \left(\mu_r - \frac{1 + \mu_r}{2} \right) \frac{N^2 S \omega}{l} = 42,8 \Omega. \quad (5)$$

Pe de altă parte, avem

$$\frac{I_{max}}{I} = \frac{\sqrt{X_L^2 + R^2}}{R} = \sqrt{1 + \left(\frac{X_L}{R} \right)^2} = 5 \quad (6)$$

de unde

$$R = \frac{X_L}{\sqrt{24}} = 8,74 \Omega. \quad (7)$$

Din definiția puterii active avem

$$P(\nu) = UI(\nu) \cos \varphi = \frac{U_{max}^2 R}{2 \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right]} \quad (8)$$

adică

$$P_{max} = \frac{U_{max}^2}{2R} \quad (9)$$

deci

$$P(v_{1,2}) = \frac{R}{2} \cdot \frac{U_{max}^2}{R^2 + \left(\omega_{1,2}L - \frac{1}{C\omega_{1,2}} \right)^2} \quad (10)$$

Se obține

$$\omega_{1,2}L - \frac{1}{C\omega_{1,2}} = \pm R \quad (11)$$

sau

$$v_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \left[\sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2}} \pm \frac{R}{2L} \right] \quad (12)$$

care dă valorile $v_1 = 9\,170$ Hz și $v_2 = 10\,920$ Hz.

c) Se poate verifica ușor că

$$\frac{v}{v_2 - v_1} = \frac{v}{R} = \frac{L\omega}{R} \quad (13)$$

12.7. O bară metalică de lungime l și masă m_1 se găsește pe un suport orizontal. Ea este deplasată, prin intermediul unui fir trecut peste un scripete fix, de un corp de masă m_2 , care este lăsat liber. Bara se deplasează perpendicular pe liniile de câmp magnetic a cărui inducție variază în timp conform relației $B = k(t - 1)$, unde k este o constantă. Coeficientul de frecare dintre bară și suport este μ , iar bara se deplasează astfel un timp dat t . Să se afle valoarea minimă a tensiunii electromotoare indusă la capetele barei (fig. 12.7).

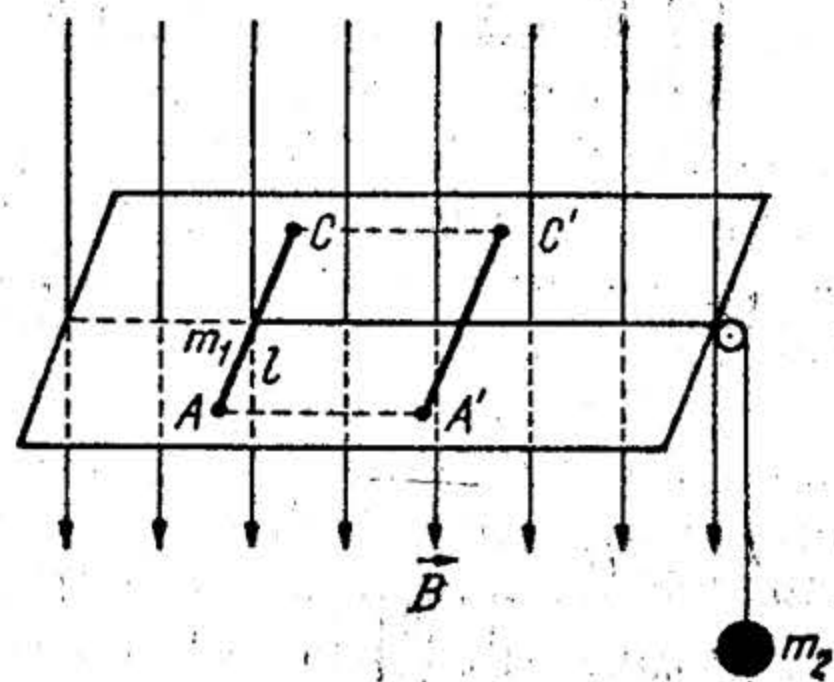


Fig. 12.7

Soluție. Conform legii lui Faraday avem

$$e = Blv \quad (1)$$

unde v este viteza de deplasare a barei.

Accelerația barei rezultă din legea a II-a a dinamicii în care implicăm și forța de frecare

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g \quad (2)$$

După timpul t de deplasare, viteza va fi

$$v = at = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} gt \quad (3)$$

iar tensiunea indusă

$$e = \frac{kl(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2} g(t^2 - t). \quad (4)$$

Derivata tensiunii de inducție se anulează după timpul

$$t' = t \Big|_{de/dt=0} = \frac{1}{2} \quad (5)$$

deci

$$e_{min} = e \Big|_{t=1/2} = \frac{kl(\mu m_1 - m_2)g}{4(m_1 + m_2)} \quad (6)$$

12.8. Se consideră un contur metalic sub forma literei U, în care cele 3 laturi sînt egale și au secțiunea S , densitatea ρ și sînt parcurse de curentul cu intensitatea I . Prin planul cadrului trece un câmp magnetic dirijat pe verticală în sus (fig. 12.8, a). Cadrul este rotit cu unghiul α . Se cere valoarea minimă a inducției cîmpului magnetic pentru a asigura echilibrul cadrului (fig. 12.8, b).

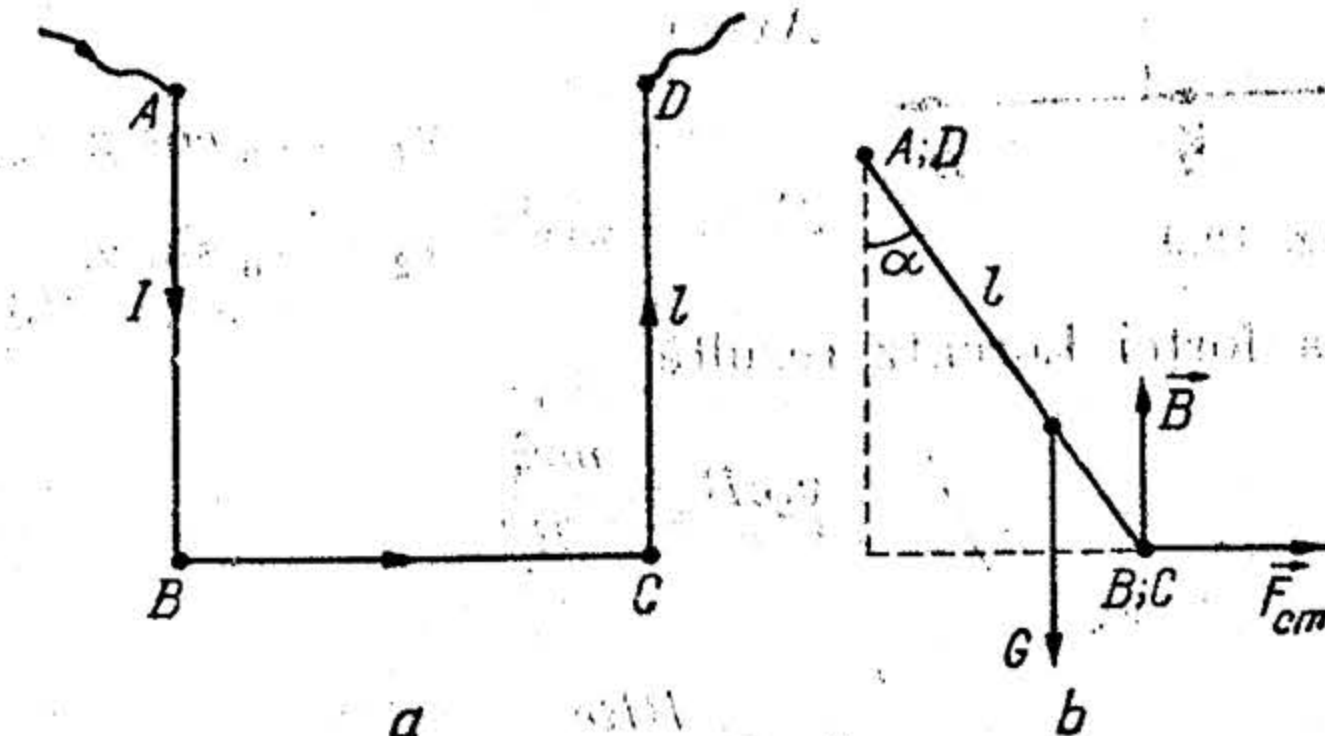


Fig. 12.8

Soluție. Cadrul este în echilibru dacă momentul greutatei sale este egal cu momentul forței electromagnetice totale. Avem

$$M_{(G)} = G \cdot \frac{2l}{3} \sin \alpha \quad (1)$$

sau

$$M_{(G)} = 3lS\rho g \cdot \frac{2}{3} l \sin \alpha \quad (2)$$

sau

$$M_{(G)} = 2l^2 S\rho g \sin \alpha \quad (3)$$

unde l este lungimea convențională a unei ramuri a cadrului.

Momentul forței electromagnetice va fi

$$M_{(F_{em})} = BIl^2 \cos \alpha. \quad (4)$$

Din condiția $M_{(G)} = M_{(F_{em})}$ rezultă

$$B_{min} = \frac{2S\rho g \sin \alpha}{I \cos \alpha} = \frac{2S\rho g}{I} \cdot \tan \alpha. \quad (5)$$

12.9. Un proton pătrunde într-un câmp magnetic uniform de inducție B și descrie o traiectorie elicoidală cu raza R și pasul h . (Se cunosc sarcina e și masa m a protonului.)

Să se arate că energia cinetică a protonului nu se modifică la trecerea prin câmpul magnetic.

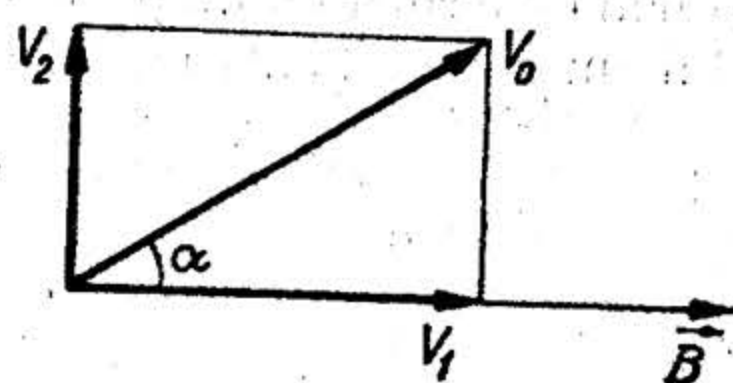


Fig. 12.9

Soluție. Fie v_0 viteza și α unghiul de intrare a protonului în câmp. (fig. 12.9). Avem

$$v_1 = v_0 \cos \alpha \quad (1)$$

$$v_2 = v_0 \sin \alpha. \quad (2)$$

$$v_2 e B = \frac{mv_2^2}{R} \quad (3)$$

sau

$$v_2 = \frac{BRv_1}{m}. \quad (4)$$

Pasul traiectoriei elicoidale este

$$h = v_1 \cdot T \quad (5)$$

unde T este perioada de rotație a protonului, de valoare

$$T = \frac{2\pi R}{v_2} \quad (6)$$

rezultă

$$v_1 = \frac{hBe}{2\pi m}. \quad (7)$$

Deci

$$E_c = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2} (v_1^2 + v_2^2) = \frac{B^2 e^2}{m^2} \left(\frac{h^2}{4\pi^2} + R^2 \right), \quad (8)$$

deci, energia cinetică la ieșirea din câmp este egală cu energia cinetică la intrarea în câmp.

12.10. Se dă un circuit R, L, C paralel (fiind cunoscute valorile R, L), alimentat de un generator de frecvență ν și având o intensitate efectivă I . Se cer:

- valoarea *maximă* a puterii disipate în rezistor;
- capacitatea condensatorului pentru care se asigură condiția a).

Soluție. a) Pentru circuitul general paralel avem

$$I = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2} \text{ și } P_R = \frac{U^2}{R}. \quad (1)$$

Puterea pe rezistorul ohmic este *maximă* dacă

$$X_L = X_C \quad (2)$$

ceea ce conduce la

$$P_{max} = I^2 R. \quad (3)$$

b) Din (2) rezultă

$$\omega^2 LC = 1 \quad (4)$$

sau

$$4\pi^2 \nu^2 LC = 1 \quad (5)$$

de unde

$$C \Big|_{P_R = P_{R \max}} = \frac{1}{4\pi^2 \nu^2 L}. \quad (6)$$

12.11. În circuitul precedent, se cer cea mai mică și cea mai mare valoare a capacității condensatorului care asigură o putere disipată pe rezistența activă egală cu jumătatea puterii maxime disipate pe rezistența activă.

Soluție. Avem

$$P_R = RI_R^2 = R[I^2 - (I_L - I_C)^2] \quad (1)$$

$$P_{R \max} = I^2 R. \quad (2)$$

Condiția problemei impune

$$P_R = \frac{P_{R \max}}{2} \quad (3)$$

sau

$$I_R^2 = \frac{I^2}{2} = I^2 - (I_L - I_C)^2. \quad (4)$$

De aici

$$I_R = \frac{U}{R} = \pm(I_L - I_C) \quad (5)$$

au

$$\frac{U}{R} = \pm \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right) U. \quad (6)$$

Rezultă

$$C_{\max} = \frac{1}{L\omega^2} + \frac{1}{R\omega} \quad (7)$$

$$C_{\min} = \frac{1}{L\omega^2} - \frac{1}{R\omega}. \quad (8)$$

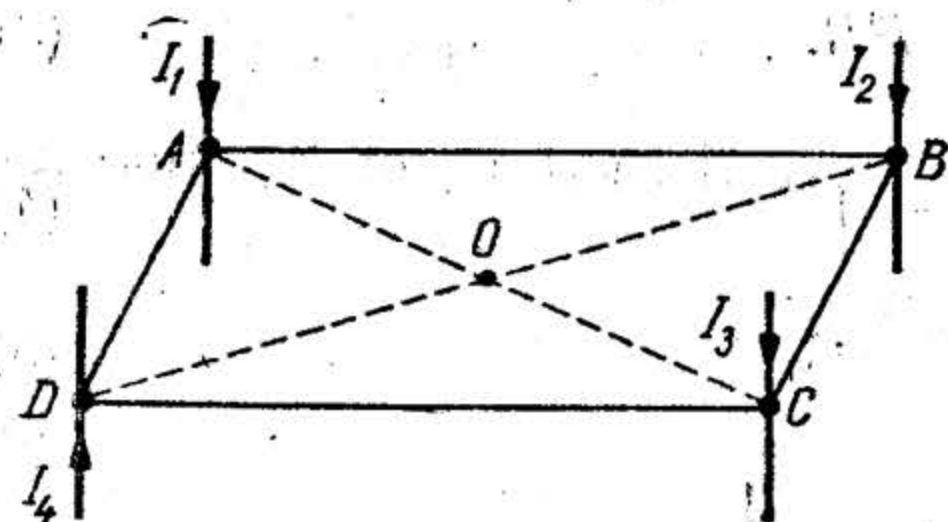


Fig. 12.12

12.12. Se dă un pătrat cu latura l și 4 conductoare paralele orientate perpendicular pe pătrat în virfurile acestuia (fig. 12.12). Intensitățile curenților au valorile $I_1 = I_3$ și $I_2 = I_4 (I_2 = 2I_1)$.

Se calculează inducțiile magnetice rezultante în punctele O , B , D . Se cere să se așeze aceste inducții în ordine crescătoare.

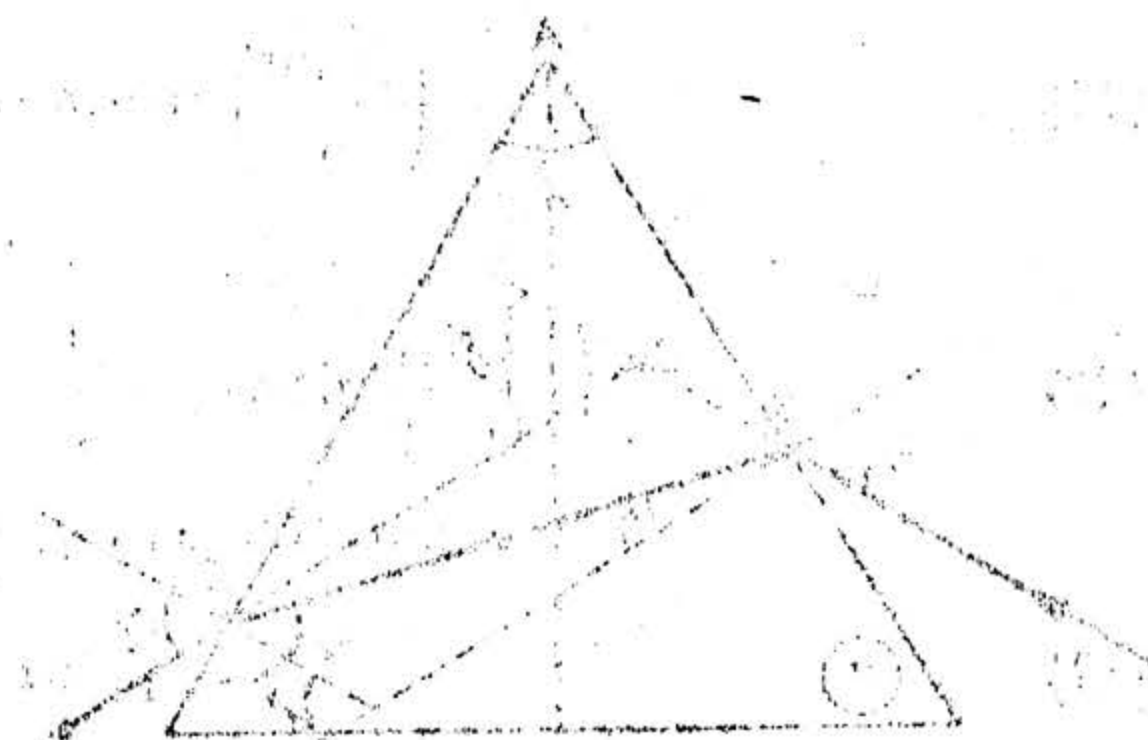
Soluție. Calculele ne dau

$$B_0 = \frac{2\mu_0 I_2 \sqrt{2}}{\pi l} \quad (1)$$

$$B_B = 0 \quad (2)$$

$$B_D = \frac{\mu_0}{2\pi l} \left(\sqrt{I_1^2 + I_3^2} + \frac{I_2 \sqrt{2}}{2} \right). \quad (3)$$

Ordinea cerută este $B_B < B_0 < B_D$.



XIII. OPTICĂ

13.1. O prismă optică are ca elemente caracteristice indicele n de refracție absolut al mediului constituent și unghiul A din vârful secțiunii drepte. O rază luminoasă cade pe una din fețele prisme sub unghiul de incidență*) i_1 . Se cere:

a) Să se calculeze în funcție de aceste elemente deviația *minimă* a razei prin prismă.

b) Ce *condiție* îndeplinește raza interioară prisme în ipoteza obținerii deviației *minime*?

c) Ce *condiție* îndeplinește unghiul prisme în ipoteza *ieșirii* razei din prismă?

d) Ce *relație* îndeplinește unghiul de ieșire din prismă dacă cel de intrare tinde spre valoarea lui *maximă*?

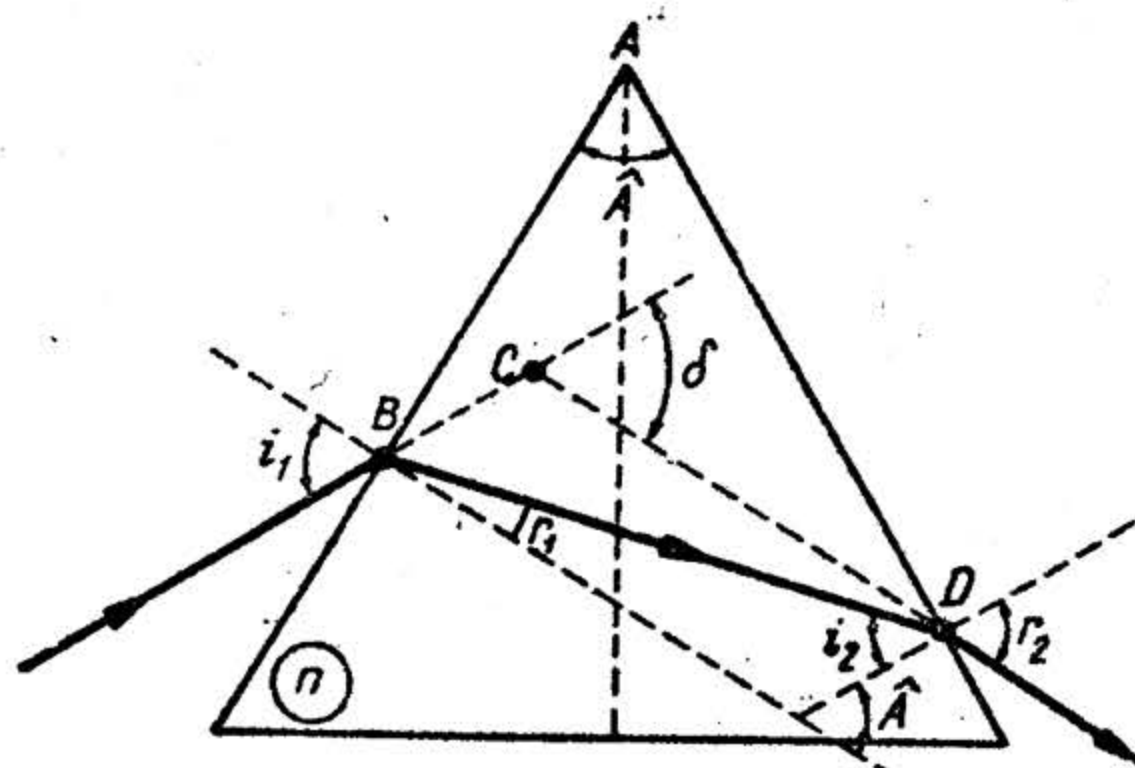


Fig. 13.1

Deviația δ este o funcție de i_1 , adică $\delta = f(i_1)$.
Din

$$\frac{d\delta}{di_1} = 0 \quad (4)$$

*) În manualul de clasa XI avem: $i_1 = i$; $r_1 = r$; $i_2 = r'$; $r_2 = i'$.

e) Să se arate că raza violetă este deviată (după ieșirea din prismă) *cel mai mult* față de celelalte raze (fig. 13.1).

Soluție. a) Mai întâi observăm că

$$\delta = i_1 - r_1 + r_2 - i_2 \quad (1)$$

$$A = r_1 + i_2 \quad (2)$$

de unde

$$\delta = i_1 + r_2 - A \quad (3)$$

se obține

$$i_1 = r_2 \quad (5)$$

și

$$\delta_{\min} = 2i_1 - A. \quad (6)$$

b) Aplicând legea a II-a a refracției în punctele B și D și ținând cont de (5), avem

$$\sin i_1 = n \sin r_1 \quad (7)$$

$$n \sin i_2 = \sin r_2 \quad (8)$$

de unde

$$r_1 = i_2, \quad (9)$$

adică, dacă se obține deviația minimă, raza interioară prisme este paralelă cu baza prisme.

c) Reflexia totală se produce în punctul D dacă

$$i_2 \geq \arcsin \frac{1}{n}. \quad (10)$$

Din (7) avem

$$r_1 = \arcsin \left(\frac{\sin i_1}{n} \right) \quad (11)$$

iar din (2) avem condiția cerută

$$A \leq \arcsin \frac{1}{n} + \arcsin \left(\frac{\sin i_1}{n} \right). \quad (12)$$

d) Valoarea maximă a lui i_1 este 90° , deci

$$\sin r_1 = \frac{1}{n} \quad (13)$$

$$\cos r_1 = \sqrt{1 - \sin^2 r_1} = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}. \quad (14)$$

În punctul de ieșire avem

$$n \sin i_2 = \sin r_2 \quad (15)$$

sau

$$\sin i_2 = \frac{\sin r_2}{n}. \quad (16)$$

Conform cu (2) avem

$$\sin i_2 = \sin A \cos r_1 - \sin r_1 \cos A \quad (17)$$

sau

$$\frac{\sin r_2}{n} = \sin A \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} - \frac{\cos A}{n} \quad (18)$$

de unde

$$\sqrt{n^2 - 1} = \frac{\sin r_2 + \cos A}{\sin A} \quad (19)$$

sau

$$\sqrt{n^2 - 1} = \operatorname{ctg} A + \frac{\sin r_2}{\sin A} \quad (20)$$

care este relația cerută.

e) Indicele de refracție absolut depinde de lungimea de undă λ conform relației

$$n = k_1 + \frac{k_2}{\lambda} \quad (21)$$

unde k_1 și k_2 sunt constante.

Aplicind legea a II-a a refracției în punctul B , pentru cazul deviației minime, avem

$$n_r = \frac{\sin \frac{\delta_{\min r} + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = k_1 + \frac{k_2}{\lambda_r} \quad (22)$$

$$n_v = \frac{\sin \frac{\delta_{\min v} + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = k_1 + \frac{k_2}{\lambda_v} \quad (23)$$

pentru razele roșie și violetă, care constituie razele extreme ale spectrului vizibil.

Deoarece $\lambda_r > \lambda_v$, rezultă că $n_r < n_v$ sau $\delta_{\min v} > \delta_{\min r}$.

Deci, raza violetă are deviația minimă cea mai mare și este deci cel mai mult deviată (în raport cu alte raze) la trecerea prin prismă.

13.2. Se dau două oglinzi plane care se intersectează sub unghiul diedru φ .

a) O sursă luminoasă aflată la distanța l de linia de intersecție a oglinzilor formează în sistemul optic două imagini virtuale. Cu ce condiție referitoare la unghiul oglinzilor, distanța dintre imagini este independentă de poziția sursei?

b) O rază pornită de la sursă se reflectă, dînd naștere la raza reflectată pe o a doua oglindă. Să se arate că unghiul dintre prima rază incidentă (I) și a doua rază reflectată (II) nu depinde de primul unghi de incidență.

c) Ce condiție trebuie să îndeplinească unghiul dintre oglinzi pentru ca razele I și II să fie perpendiculare (fig. 13.2)?

Soluție. a) Din fig. 13.2, a se observă că

$$\begin{aligned} BB'' &= 2l \sin \beta \\ BB' &= 2l \sin \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

și

$$B'B'' = \sqrt{BB'^2 + BB''^2 - 2BB' \cdot BB'' \cos \widehat{B'BB''}} \quad (2)$$

sau

$$B'B'' = 2l \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos (\alpha + \beta)}. \quad (3)$$

Se observă că dacă

$$\alpha + \beta = \varphi = 90^\circ \quad (4)$$

avem

$$B'B'' = 2l. \quad (5)$$

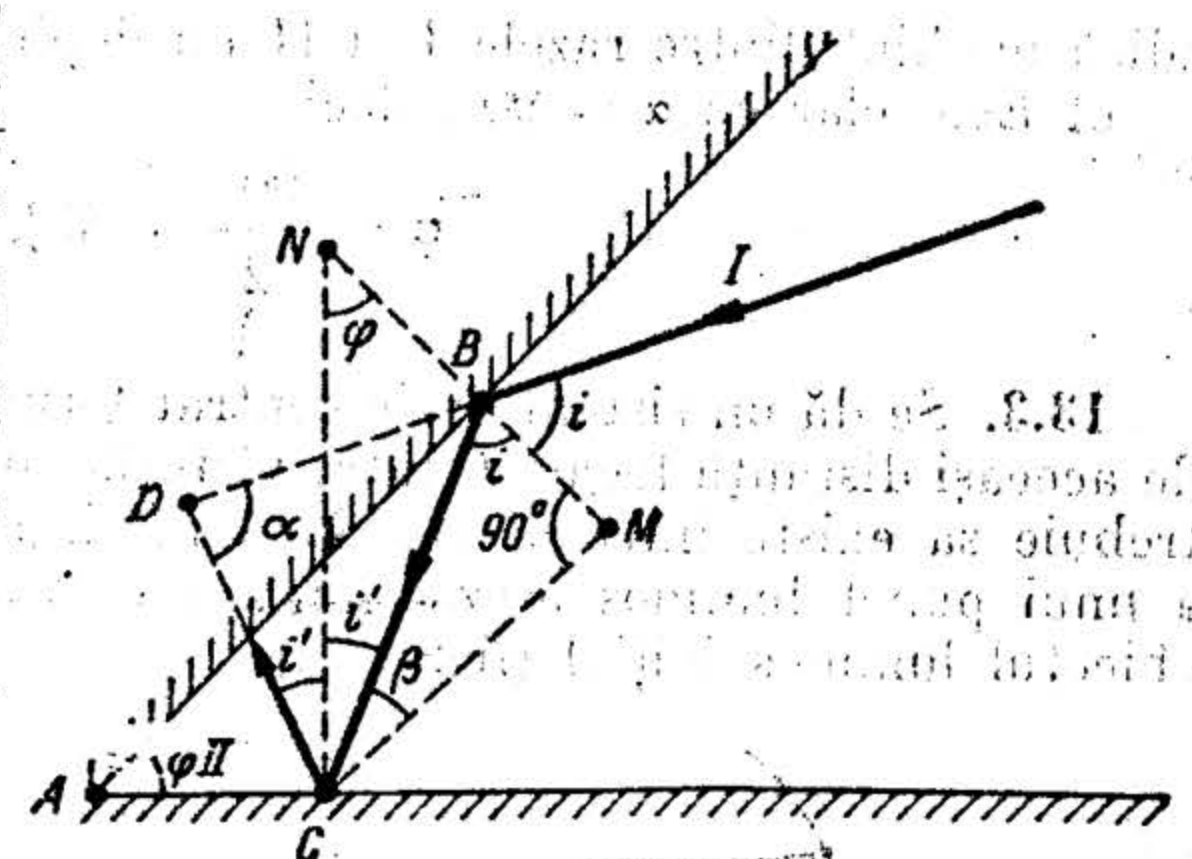
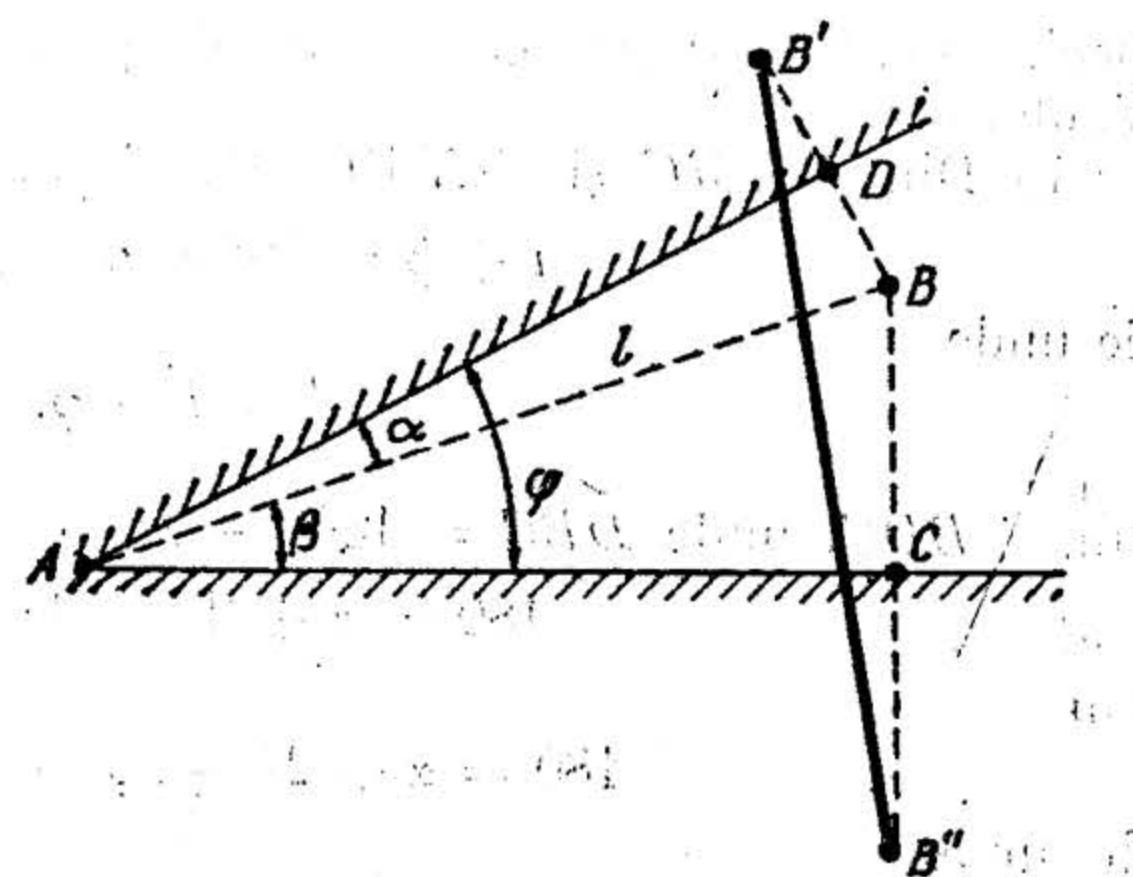


Fig. 13.2

Deci, condiția (4) este cea cerută de problemă (oglinzile să fie perpendiculare).

b) Din $\triangle BMC$ și $\triangle NMC$ (fig. 13.2, b) avem

$$i + \beta = 90^\circ = \varphi + \beta + i' \quad (6)$$

de unde

$$i' = i - \varphi. \quad (7)$$

Din $\triangle BDC$, unde $\widehat{DBC} = 180^\circ - 2i$, avem

$$180 = \alpha + 2i' + 180 - 2i \quad (8)$$

sau

$$180 = \alpha + 2i - 2\varphi + 180 - 2i \quad (9)$$

de unde

$$\alpha = 2, \quad (10)$$

adică unghiul dintre razele I și II nu depinde de i .

c) Este clar că $\alpha = 90^\circ$, deci

$$\varphi = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ. \quad (11)$$

13.3. Se dă un sistem optic centrat format din două oglinzi concave de aceeași distanță focală f , între vîrfurile lor fiind distanța d . Ce relație trebuie să existe între aceste două mărimi pentru ca imaginea finală a unui punct luminos așezat pe axa optică principală să coincidă cu obiectul luminos inițial (fig. 13.3)?

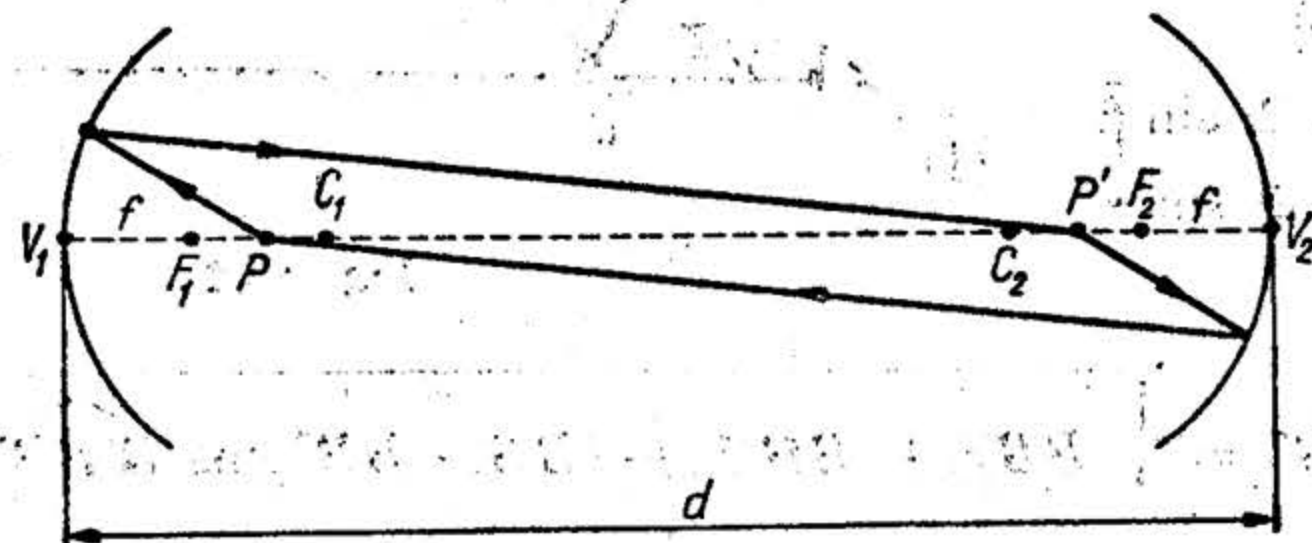


Fig. 13.3

Soluție. Între poziția punctului luminos și imaginea sa față de prima oglindă există relația

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

de unde

$$p' = \frac{pf}{p - f}. \quad (2)$$

Rezultă

$$(p)' = d - p' = \frac{pd - df - pf}{p - f}. \quad (3)$$

Imaginea P' a obiectului devine obiect pentru a doua oglindă, adică avem

$$\frac{1}{(p)'} + \frac{1}{(p')'} = \frac{1}{f} \quad (4)$$

de unde

$$(p')' = \frac{(p)'f}{(p)' - f} = \frac{f(pd - df - pf)}{pd - df - 2pf + f^2}. \quad (5)$$

Deoarece

$$(p')' = d - p \quad (6)$$

avem în final

$$p^2 - dp + fd = 0 \quad (7)$$

de unde

$$p_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4fd}}{2}. \quad (8)$$

Deci, condiția cerută de problemă este

$$d \geq 4f. \quad (9)$$

13.4. Se dă o lentilă convergentă de distanță focală f .

a) Să se afle poziția obiectului față de lentilă (p) pentru care distanța obiect-imagine este *minimă* (presupunind lentila în repaus)*.

b) Se consideră ca *invariabilă* distanța d' dintre obiect și imagine. Ce relație va fi între d' și f pentru ca prin deplasarea lentilei să se obțină două poziții ale imaginii clare a obiectului.

* În manualul de clasa XI avem: $p = x_1$; $p' = x_2$, cu o anumită convenție de semne.

Soluție. a) Din formula distanței focale

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

găsim

$$p' = \frac{pf}{p-f} \quad (2)$$

Atunci funcția

$$F(p) = p + p' \quad (3)$$

va fi

$$F(p) = \frac{p^2}{p-f} \quad (4)$$

iar derivata ei

$$\frac{dF}{dp} = \frac{p^2 - 2pf}{(p-f)^2} \quad (5)$$

Distanța minimă obiect-imagine va fi

$$F_{min} = F(p_{min}) = 4f. \quad (6)$$

b) Din (1) și

$$p + p' = d' \quad (7)$$

deducem

$$p^2 - d'p + fd' = 0 \quad (8)$$

de unde

$$p_{1,2} = \frac{d' \pm \sqrt{d'^2 - 4fd'}}{2} \quad (9)$$

Trebuie deci îndeplinită condiția

$$d' > 4f. \quad (10)$$

13.5. Un obiect se află la distanța $d_1 = k_1 f$ ($k_1 > 1$) de vârful unei oglinzi concave de distanță focală f . El se apropie de vârful oglinzii, la distanța $d_2 = k_2 f$ ($k_2 < k_1$). Să se determine valoarea lui k_1 pentru care se obține valoarea maximă a raportului dintre viteza de deplasare a imaginii și viteza de deplasare a obiectului (mișcarea obiectului se presupune uniformă; fig. 13.5).

Soluție. Pentru prima poziție a obiectului se obține prima poziție a imaginii

$$\frac{1}{k_1 f} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

de unde

$$x_1 = \frac{k_1 f}{k_1 - 1} \quad (2)$$

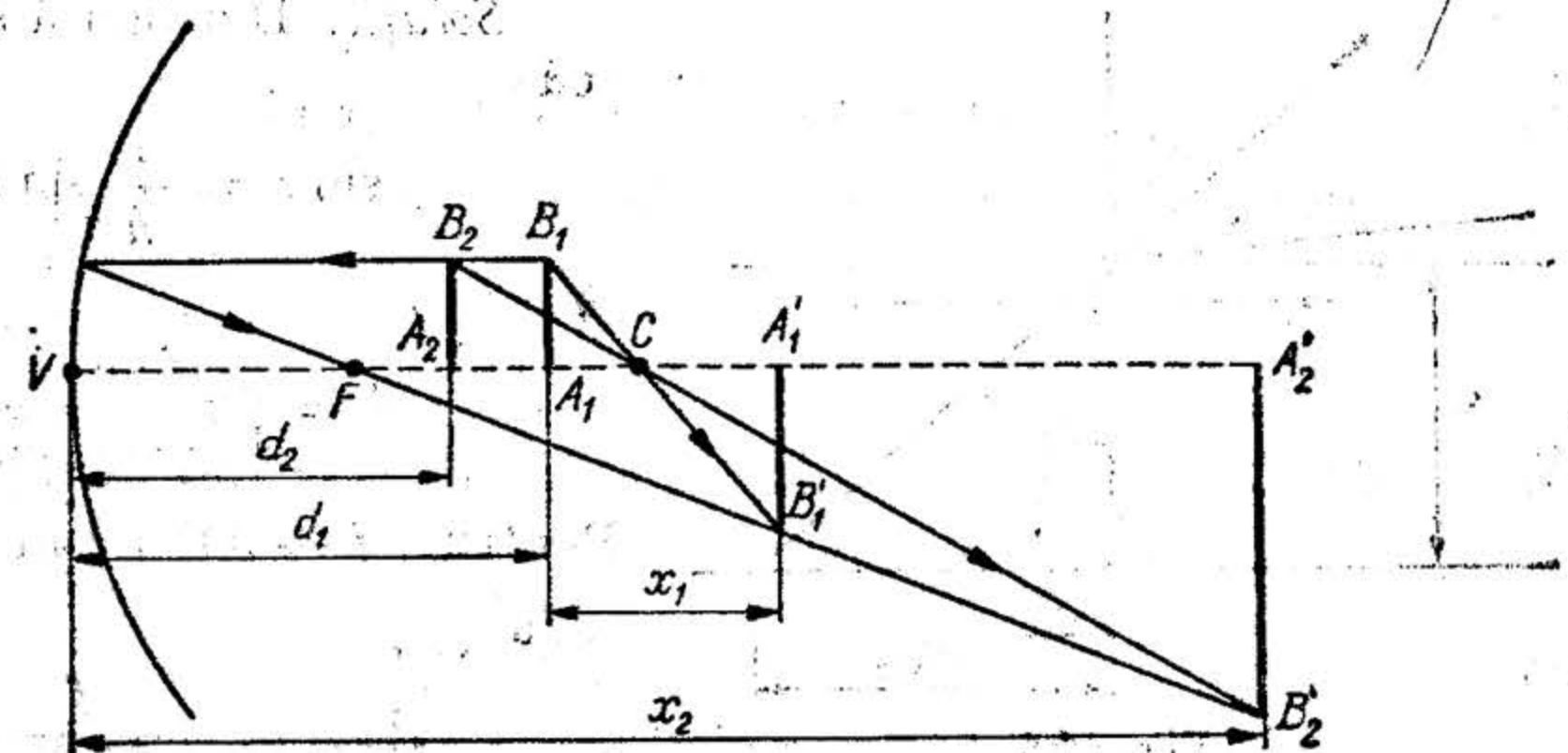


Fig. 13.5

Asemănător se obține a doua poziție a imaginii

$$x_2 = \frac{k_2 f}{k_2 - 1} \quad (3)$$

Viteza la deplasare a obiectului este

$$v_1 = \frac{d_1 - d_2}{t} = \frac{f(k_1 - k_2)}{t} \quad (4)$$

iar a imaginii obiectului

$$v_2 = \frac{x_2 - x_1}{t} \quad (5)$$

Raportul lor va fi

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{f}{(k_2 - 1)(k_1 - 1)} \quad (6)$$

Se observă că pentru $k_1 \rightarrow 1$, raportul vitezelor devine foarte mare. Din construcția imaginii se poate observa că pe măsură ce obiectul se apropie de focar, imaginea acestuia tinde spre infinit.

13.6. Asupra unei lentile convergente de distanță focală f , scufundată într-un lichid cu indicele de refracție n , se îndreaptă un fascicul paralel de raze. Să se afle diametrul *maxim* al porțiunii luminoase formate pe un ecran așezat în planul focal al lentilei, paralel cu suprafața liberă a lichidului (fig. 13.6).

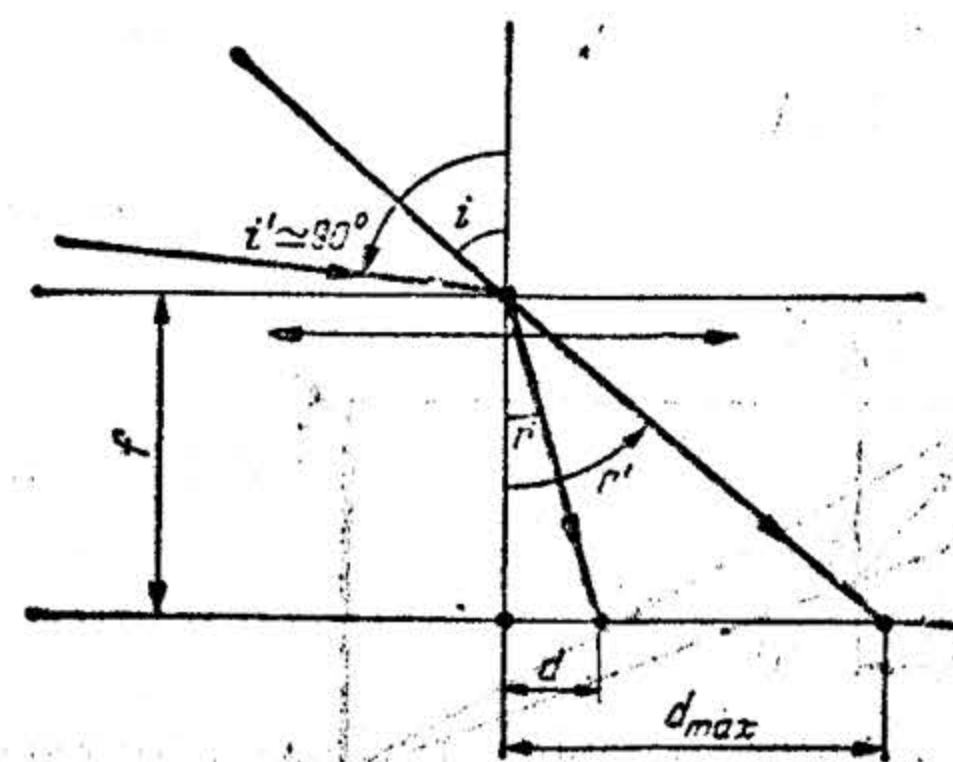


Fig. 13.6

Soluție. Din figură se observă că

$$\sin r = \frac{1}{n} \sin i \quad (1)$$

$$d = \frac{f \sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \quad (2)$$

Pentru $i \rightarrow 90^\circ$ avem $d \rightarrow d_{\max}$ sau

$$d_{\max} = \frac{f}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (3)$$

Diametrul imaginii luminoase va fi

$$D_{\max} = 2d_{\max} = \frac{2f}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (4)$$

13.7. Un obiect luminos este plasat pe fundul unui vas (ce conține un lichid cu indicele de refracție absolut n) și acoperit cu o pîlnie de unghi 2φ . În ce condiții e vizibil obiectul (fig. 13.7)?

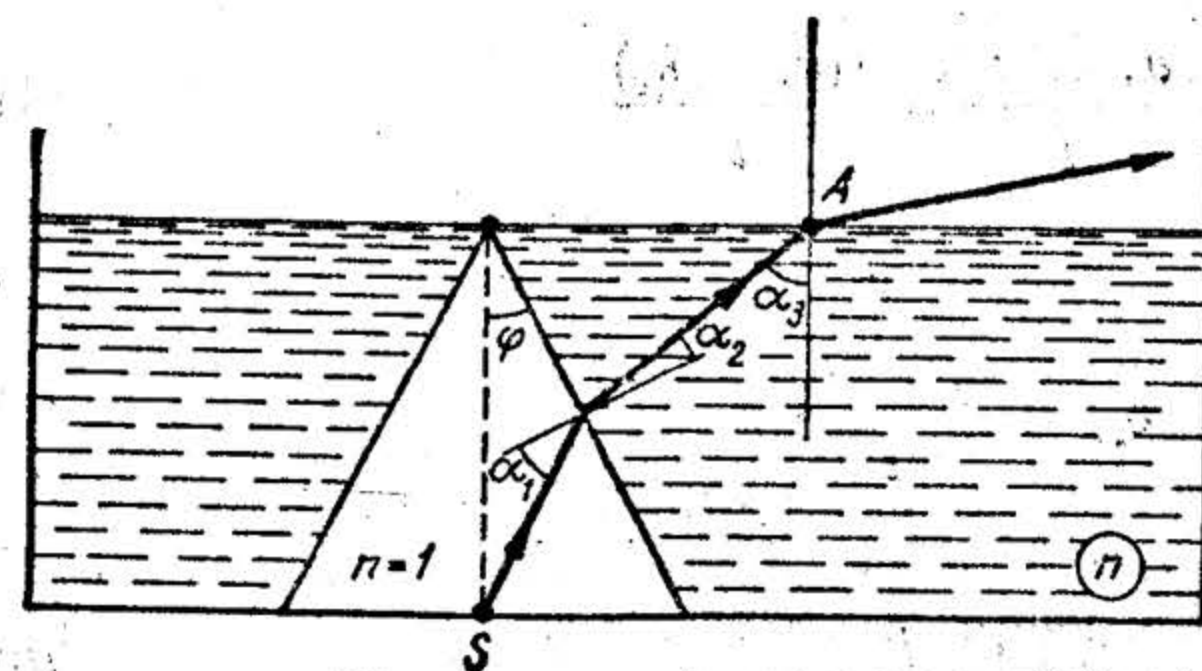


Fig. 13.7

Soluție. Mai întîi observăm că raza luminoasă sosită de la obiect iese din lichid (și deci obiectul e vizibil din exterior) dacă în punctul A nu se produce reflexia totală, adică dacă

$$\sin \alpha_3 \leq \frac{1}{n} \quad (1)$$

Mai observăm că

$$\alpha_2 = 90 - (\varphi + \alpha_3) \quad (2)$$

de unde

$$\sin \alpha_2 = \cos (\varphi + \alpha_3) = \cos \varphi \cos \alpha_3 - \sin \varphi \sin \alpha_3 \quad (3)$$

Mai există relația

$$\sin \alpha_1 = n \sin \alpha_2 \quad (4)$$

sau

$$\sin \alpha_1 = \sqrt{n^2 - 1} \cos \varphi - \sin \varphi \quad (5)$$

Observăm că în cazul cel mai nefavorabil al refracției avem

$$\alpha_{1 \max} = 90 - \varphi$$

de unde

$$\sin \alpha_1 = \sin (90 - \varphi) = \cos \varphi = \sqrt{n^2 - 1} \cos \varphi - \sin \varphi \quad (7)$$

sau

$$\operatorname{tg} \varphi \geq \sqrt{n^2 - 1} - 1, \quad (8)$$

care reprezintă condiția de vizibilitate a obiectului.

13.8. La trecerea unei raze luminoase printr-o lamă cu fețe plan-paralele se cunosc: unghiul de incidență i , grosimea lamei d și indicele de refracție absolut al lamei n . Să se arate că raza emergentă este paralelă cu cea incidentă și să se calculeze deviația *maximă* a razei (fig. 13.8).

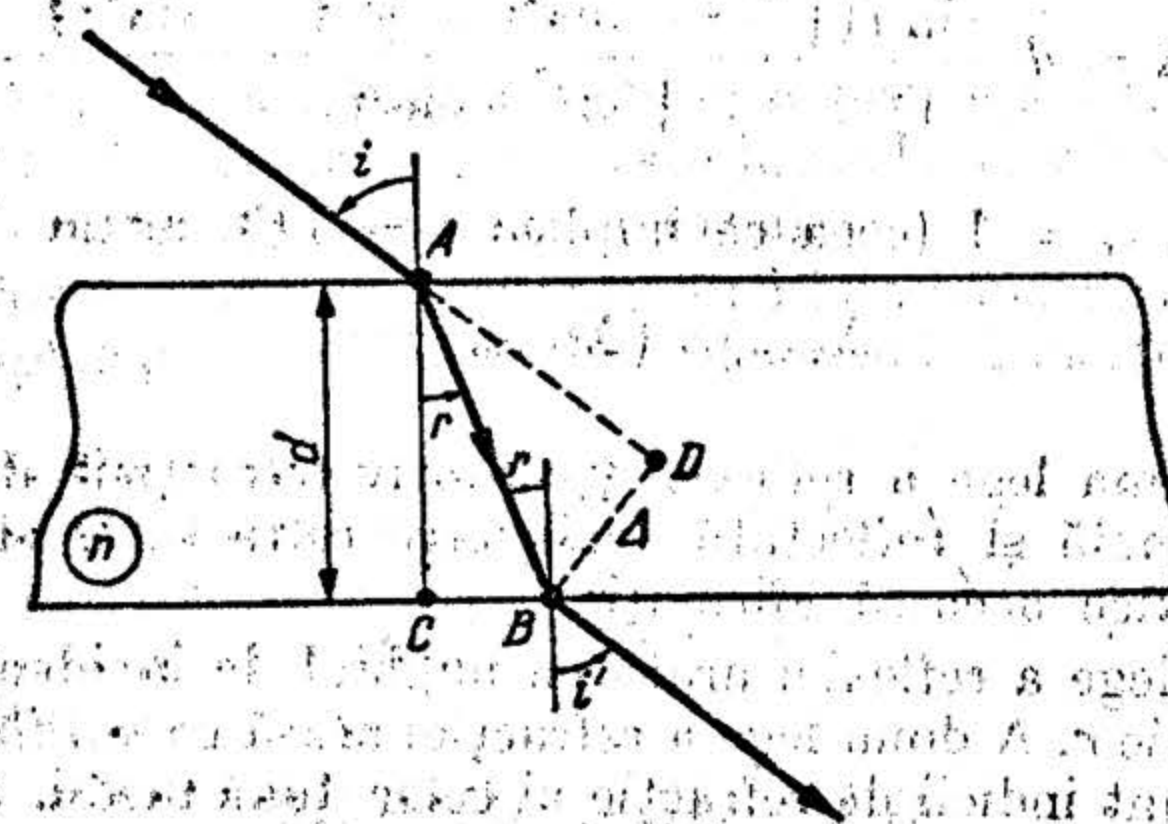


Fig. 13.8

Soluție. Presupunând că raza intră în lamă venind din aer și iese tot în aer, aplicăm legea a II-a a refracției în punctele A și B

$$\sin i = n \sin r \quad (1)$$

$$n \sin r = \sin i' \quad (2)$$

de unde

$$i = i' \quad (3)$$

ceea ce implică paralelismul razelor incidentă și emergentă.

Din figură se observă că

$$\Delta = d \frac{\sin(i - r)}{\cos r} \quad (4)$$

sau

$$\Delta = d \frac{\sin i \cos r - \cos i \sin r}{\cos r} \quad (5)$$

Observind că

$$\cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i} \quad (6)$$

$$\cos r = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \quad (7)$$

avem

$$\Delta = d \frac{\sin i (\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \sqrt{1 - \sin^2 i})}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \quad (8)$$

Intrucât $(\sin i)_{\max} = 1$ (ceea ce implică $i \rightarrow 90^\circ$), avem

$$\Delta_{\max} = (\Delta)_{i \rightarrow 90^\circ} = d. \quad (9)$$

13.9. a) Prima lege a reflexiei (respectiv refracției) afirmă că razele incidentă, normală și reflectată (respectiv refractată) sunt coplanare. Să se justifice această afirmație.

b) A doua lege a reflexiei arată că unghiul de incidență i este egal cu cel de reflexie r . A doua lege a refracției arată că $\sin i / \sin r' = n_2 / n_1$, unde n_1 și n_2 sunt indicii de refracție ai celor două medii. Să se verifice (fig. 13.9).

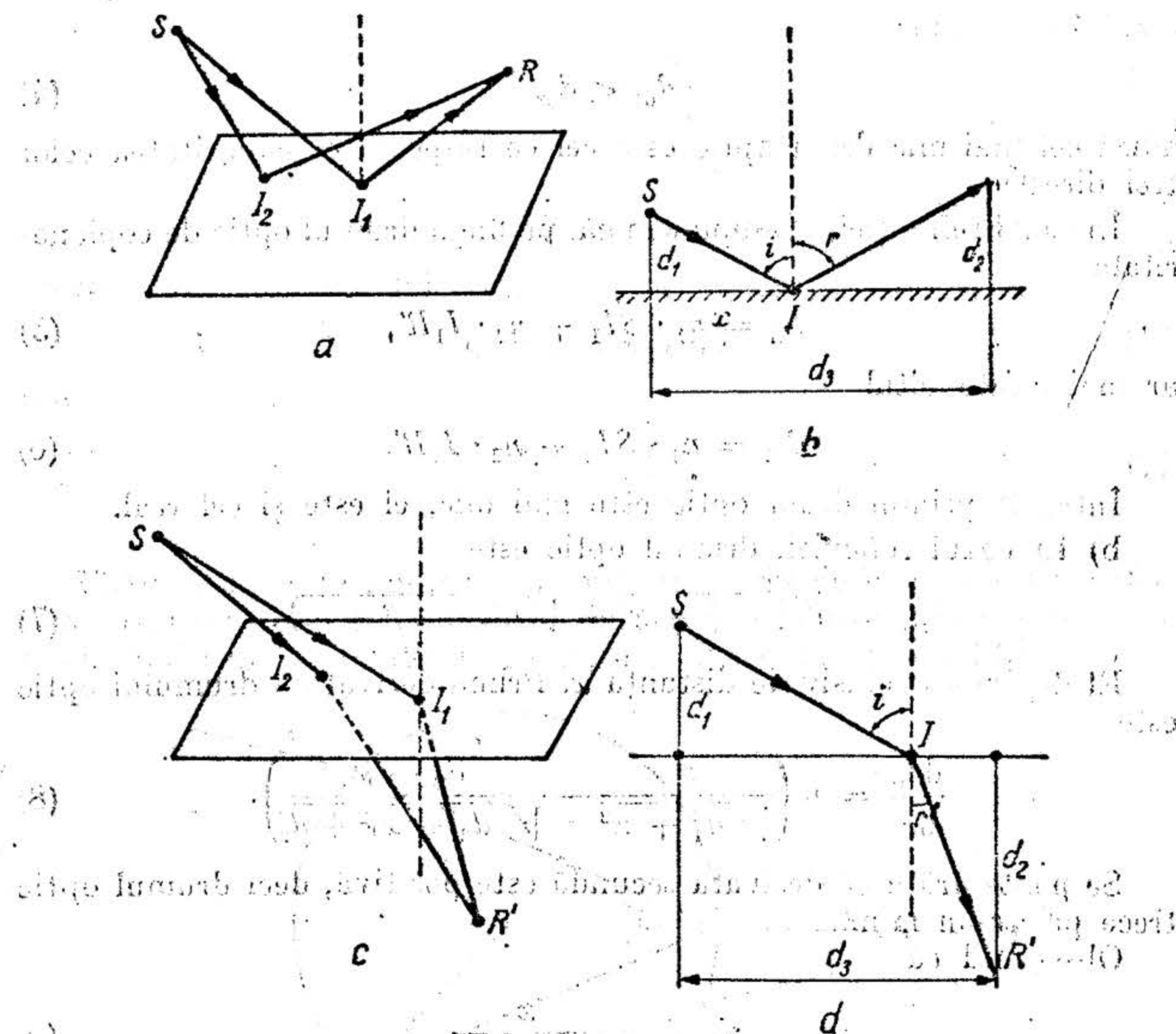


Fig. 13.9

Soluție. a) Într-un mediu optic lumina se propagă astfel încât drumul optic $d_0 = nd$ să fie minim (unde n este indicele de refracție absolut al mediului, iar d drumul geometric al razei).

Pentru reflexie, admitem existența unei alte traiectorii SI_2R diferită de cea de coplanaritate SI_1R . Pe cele două traiectorii, drumurile optice sunt

$$d_{01} = n(SI_1 + I_1R) \quad (1)$$

$$d_{02} = n(SI_2 + I_2R) \quad (2)$$

Deoarece totdeauna

$$SI_2 + I_2R > SI_1 + I_1R \quad (3)$$

rezultă totdeauna

$$d_{01} < d_{02} \quad (4)$$

adică cel mai mic drum optic este cel ce respectă coplanaritatea celor trei direcții.

În cazul refracției, presupunem că, pe lângă drumul optic de coplanaritate

$$d_{01} = n_1 \cdot SI_1 + n_2 \cdot I_1R', \quad (5)$$

ar mai exista altul

$$d_{02} = n_1 \cdot SI_2 + n_2 \cdot I_2R'. \quad (6)$$

Intrucât primul drum optic este mai mic, el este și cel real.

b) În cazul reflexiei, drumul optic este

$$d_0 = n(\sqrt{d_1^2 + x^2} + \sqrt{(d_3 - x)^2 + d_2^2}). \quad (7)$$

El depinde exclusiv de distanța x . Prima derivată a drumului optic este

$$\frac{dd_0}{dx} = n \left(\frac{x}{\sqrt{d_1^2 + x^2}} - \frac{d_3 - x}{\sqrt{(d_3 - x)^2 + d_2^2}} \right). \quad (8)$$

Se poate arăta că derivata secundă este pozitivă, deci drumul optic trece printr-un minim.

Observând că

$$\sin i = \frac{x}{\sqrt{d_1^2 + x^2}} \quad (9)$$

$$\sin r = \frac{d_3 - x}{\sqrt{(d_3 - x)^2 + d_2^2}} \quad (10)$$

rezultă, din anularea lui (8),

$$i = r. \quad (11)$$

La refracție, drumul optic va fi

$$d_0 = n_1 \sqrt{d_1^2 + x^2} + n_2 \sqrt{(d_3 - x)^2 + d_2^2} \quad (12)$$

iar derivata lui în raport cu x are valoarea

$$\frac{dd_0}{dx} = n_1 \frac{x}{\sqrt{d_1^2 + x^2}} - n_2 \frac{d_3 - x}{\sqrt{(d_3 - x)^2 + d_2^2}}. \quad (13)$$

Observând că

$$\sin i = \frac{x}{\sqrt{d_1^2 + x^2}} \quad (14)$$

$$\sin r' = \frac{d_3 - x}{\sqrt{(d_3 - x)^2 + d_2^2}} \quad (15)$$

rezultă, din anularea lui (13),

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r' \quad (16)$$

sau

$$\frac{\sin i}{\sin r'} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (17)$$

13.10. O rază de lumină cade sub un unghi de incidență pe o sferă plină transparentă de indice de refracție absolut n . Să se afle acest unghi astfel încât deviația unghiulară să fie maximă (fig. 13.10).

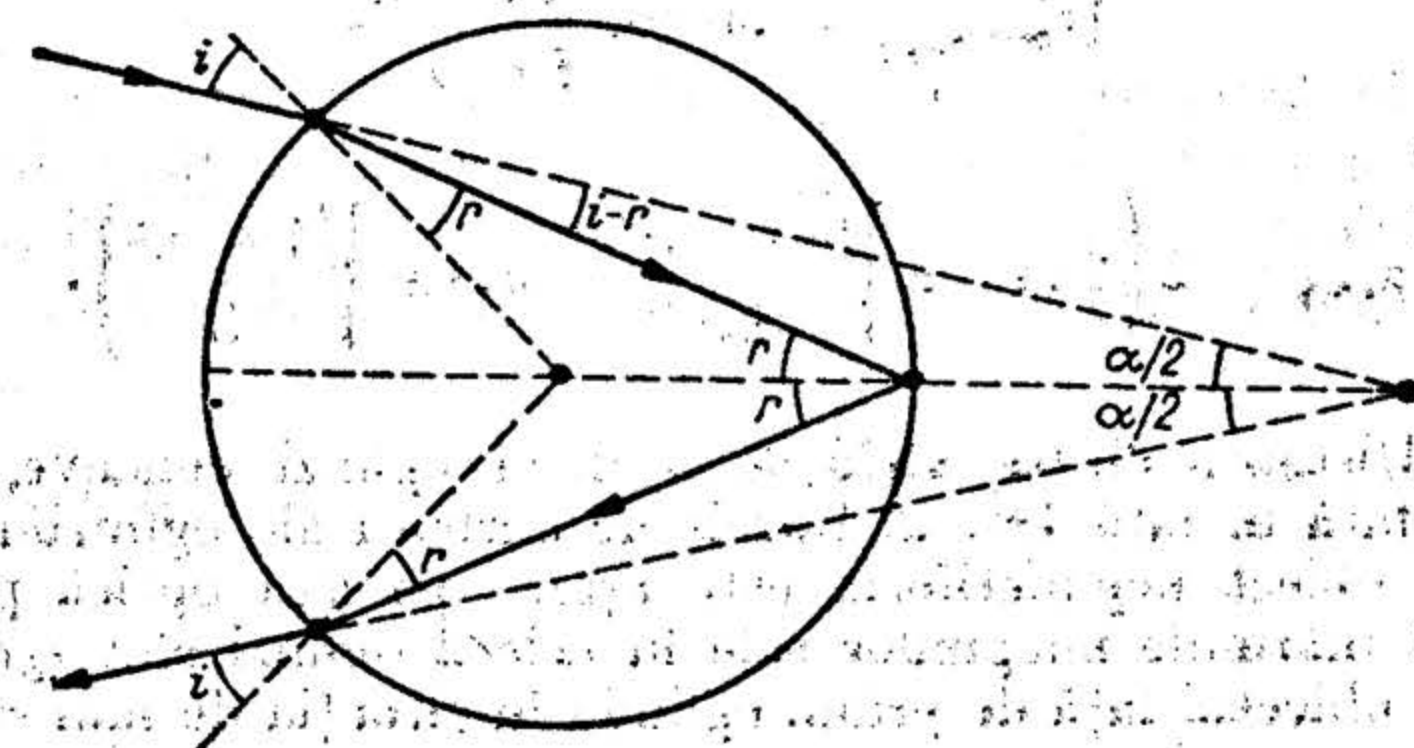


Fig. 13.10.

Soluție. Se observă că

$$\begin{aligned} \alpha &\in (0; 90^\circ) \\ r &\in \left(0; \arcsin \frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Conform figurii, avem

$$r = i - r' + \frac{\alpha}{2} \quad (2)$$

de unde

$$\alpha = 4r - 2i. \quad (3)$$

Observind că

$$i = \arcsin(n \sin r) \quad (4)$$

rezultă

$$\alpha = 2[2r - \arcsin(n \sin r)] \quad (5)$$

care, derivat în raport cu r , ne dă

$$\frac{d\alpha}{dr} = 2 \left[2 - \frac{n \cos r}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 r}} \right]. \quad (6)$$

Prin anularea derivatei obținem

$$\sin r = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3n^2}} \quad (7)$$

deci

$$[i]_{\alpha=\alpha_{\max}} = \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \quad (8)$$

de unde

$$\alpha_{\max} = 2 \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3n^2}} - \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \right). \quad (9)$$

13.11. Distanța dintre vîrfurile a două oglinzi concave, centrate și așezate față în față, este d . Razele de curbură ale oglinzilor sînt R_1 și R_2 . Un obiect nepunctiform este așezat pe axa optică principală astfel încît mărimile imaginilor sale în cele 2 oglinzi sînt egale. Unde este plasat obiectul față de prima oglindă în situația de mai sus?

Soluție. Notînd cu p și p' poziția obiectului și a imaginii sale față de prima oglindă, avem

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R_1} \quad (1)$$

de unde

$$p' = \frac{pR_1}{2p - R_1} \quad (2)$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{R_1}{2p - R_1} = \frac{i_1}{\sigma} \quad (3)$$

Depărtarea obiectului față de a doua oglindă este $d - p$ deci, avem

$$\frac{1}{d - p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R_2} \quad (4)$$

de unde

$$p' = \frac{R_2(d - p)}{2(d - p) + R_2} \quad (5)$$

$$\frac{p'}{d - p} = \frac{R_2}{2(d - p) + R_2} = \frac{i_2}{\sigma} \quad (6)$$

Din condiția $i_1 = i_2$, avem

$$[p]_{i_1=i_2} = \frac{dR_1}{R_1 + R_2} \quad (7)$$

13.12. Un teren circular de rază a trebuie iluminat *cît mai mult* pe margini. Pentru aceasta se folosește o sursă luminoasă fixată la o anumită înălțime pe perpendiculara dusă în centrul terenului.

Să se determine această înălțime în condiția cerută de problemă (fig. 13.12).

Soluție. Din optica fotometrică avem relația

$$E = k \frac{\cos \alpha}{r^2} \quad (1)$$

unde E este iluminarea produsă de o sursă.

Observind că

$$r = \sqrt{h^2 + a^2} \quad (2)$$

$$\cos \alpha = \frac{h}{r}$$

avem

$$E = k \frac{h}{(h^2 + a^2)^{3/2}} \quad (3)$$

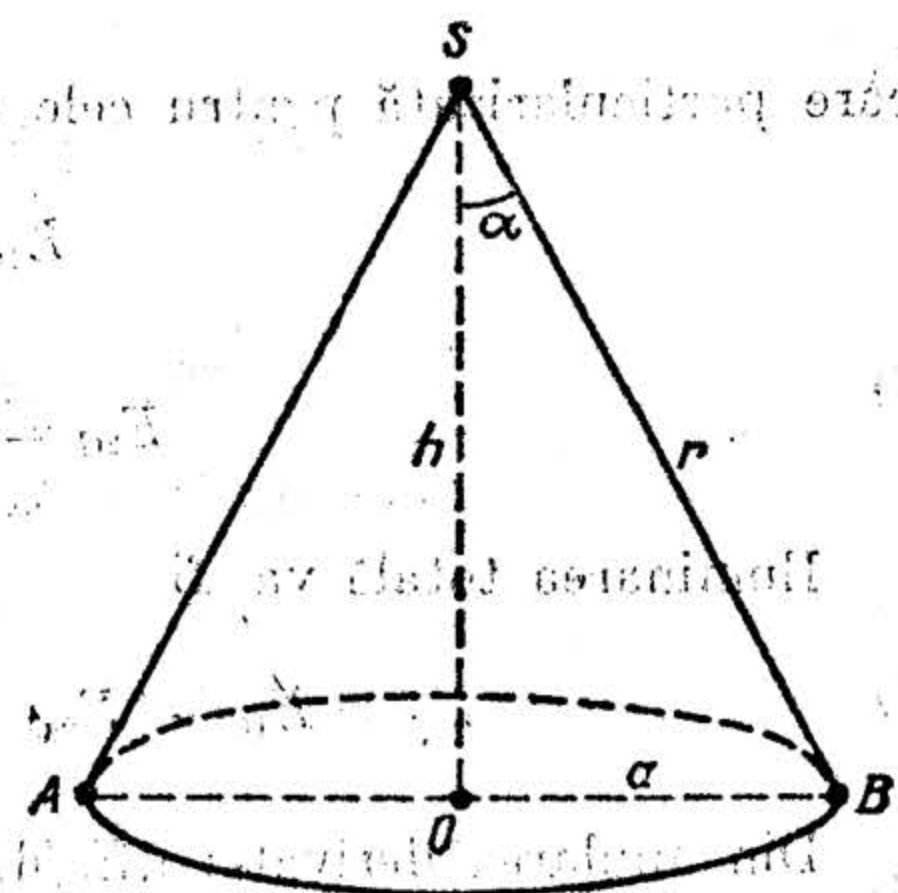


Fig. 13.12

Derivata iluminării în raport cu h este

$$\frac{dE}{dh} = k \frac{a^2 - 2h^2}{(h^2 + a^2)^{5/2}} \quad (4)$$

Din anularea ei găsim

$$[h]_{E=E_{max}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad (5)$$

Deoarece pentru $h < a\sqrt{2}/2$ avem $dE/dh > 0$ și pentru $h > a\sqrt{2}/2$ avem $dE/dh < 0$, iluminarea trece printr-un maxim pentru valoarea susmenționată a înălțimii.

13.13. În punctele A și B situate la distanța d se află două surse luminoase cu intensitățile I_1 și I_2 ($I_1 > I_2$). Să se afle poziția punctului C , situat între A și B în care iluminarea este minimă (fig. 13.13).

Soluție. Avem relația

$$E = \frac{I}{d^2} \quad (1)$$

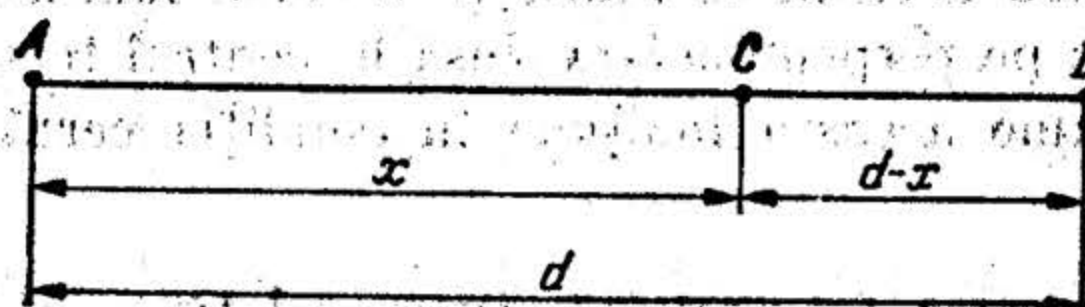


Fig. 13.13

care particularizată pentru cele două surse ne dă

$$E_{1C} = \frac{I_1}{x^2} \quad (2)$$

$$E_{2C} = \frac{I_2}{(d-x)^2} \quad (3)$$

Iluminarea totală va fi

$$E_C = E_{1C} + E_{2C} = \frac{I_1(d-x)^2 + I_2x^2}{x^2(d^2 - 2dx + x^2)} \quad (4)$$

Din anularea derivatei dE_C/dx , avem

$$I_1(d-x)^3 - I_2x^3 = 0 \quad (5)$$

Soluția reală a acestei ecuații va fi

$$[x]_{E=E_{min}} = \frac{d}{1 + \sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}} \quad (6)$$

13.14. O prismă Amici este alcătuită prin alipirea a trei prisme din care cea mijlocie este isoscelă (în secțiune), iar cele extreme au unghiul prisme egal cu $A_1 = A_3 = 90^\circ$ (fig. 13.14). Indicii de refracție ai mediilor prisme sunt $n_1 = n_3$ și n_2 ($n_2 > n_1$). Cu ce condiție raza emergentă este coliniară cu cea incidentă?

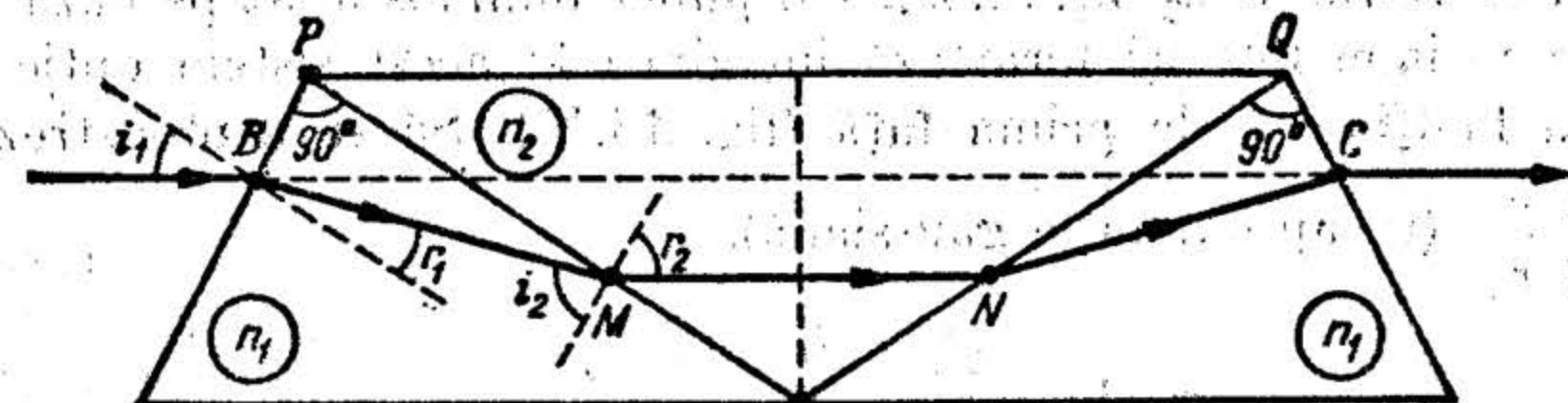


Fig. 13.14

Soluție. Porțiunea MN din rază trebuie să fie paralelă cu baza PQ a prisme mijlocii. Pe acest motiv avem

$$i_1 = 90 - \frac{A_2}{2} \quad (1)$$

$$r_2 = \frac{A_2}{2}$$

și

$$r_1 + i_2 = A_1 = 90^\circ \quad (2)$$

Legile refracției, scrise în punctele B și M ne dau

$$\sin i_1 = n_1 \sin r_1 \quad (3)$$

$$n_1 \sin i_2 = n_2 \sin r_2 \quad (4)$$

sau

$$n_1 \sin (90 - r_1) = n_1 \cos r_1 = n_2 \sin \frac{A_2}{2} \quad (5)$$

Deoarece

$$\cos r_1 = \sqrt{1 - \sin^2 r_1} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i_1}{n_1^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{n_1^2} \cos^2 \frac{A_2}{2}} \quad (6)$$

avem

$$\operatorname{tg} \frac{A_2}{2} = \sqrt{\frac{n_1^2 - 1}{n_2^2 - n_1^2}} \quad (7)$$

care reprezintă condiția cerută.

13.15. Se dau n lame cu fețe plan-paralele, de grosimi h_1, h_2, \dots, h_n și indici de refracție n_1, n_2, \dots, n_n . Un punct luminos aflat pe baza inferioară a ultimei fețe își formează imaginea în acest sistem optic la o anumită înălțime h de prima față (fig. 13.15). Să se demonstreze că $h = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{n_i}$ (în aproximație gaussiană).

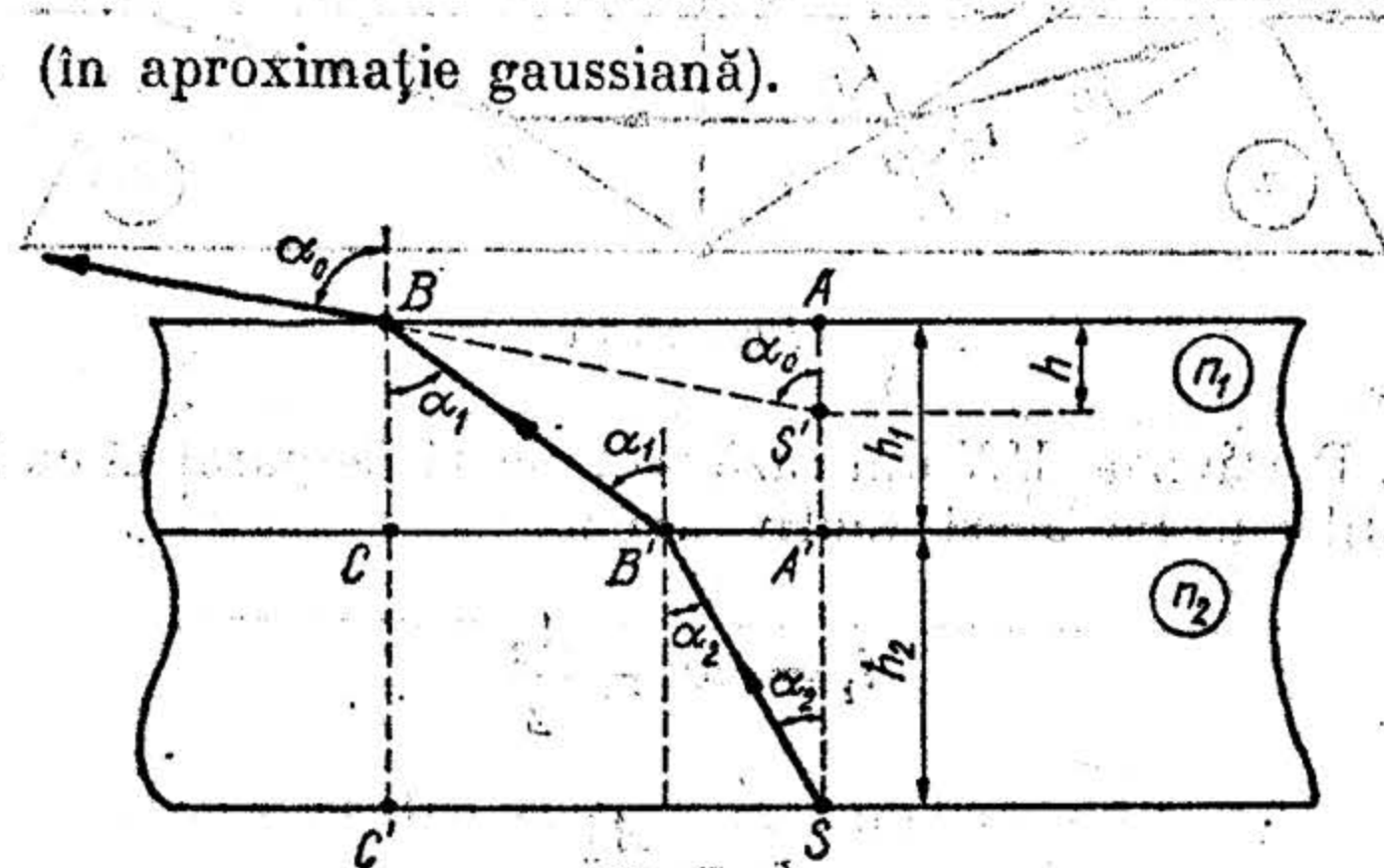


Fig. 13.15

Soluție. Vom face demonstrația pentru cazul a 2 lame. Se observă valabilitatea relațiilor

$$AB = A'B' + B'C = h \operatorname{tg} \alpha_0 \quad (1)$$

$$A'B' = h_2 \operatorname{tg} \alpha_2$$

$$B'C = h_1 \operatorname{tg} \alpha_1$$

de unde

$$h \operatorname{tg} \alpha_0 = h_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + h_2 \operatorname{tg} \alpha_2 \quad (2)$$

Mai există relațiile

$$n_1 \sin \alpha_1 = \sin \alpha_0 \quad (3)$$

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

În aproximație gaussiană avem

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \quad (4)$$

$$\cos \alpha \approx 1$$

deci

$$h \sin \alpha_0 = h_1 \sin \alpha_1 + h_2 \sin \alpha_2 \quad (5)$$

sau

$$h \sin \alpha_0 = h_1 \frac{\sin \alpha_0}{n_1} + h_2 \cdot \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_1 = \frac{h_1}{n_1} \sin \alpha_0 + \frac{h_2}{n_2} \sin \alpha_0 \quad (6)$$

de unde

$$h = \frac{h_1}{n_1} + \frac{h_2}{n_2} \quad (7)$$

relație ce se poate generaliza.

13.16. Se dau două surse luminoase coerente S_1 și S_2 așezate ca în fig. 13.16. Se știe că $D \gg \lambda$; $a = n\lambda \gg \lambda$. Se cere:

- să se descrie ansamblul figurilor de interferență de pe ecran;
- distanța de la centrul A al ecranului (E) până la *maximul* vecin celui central.

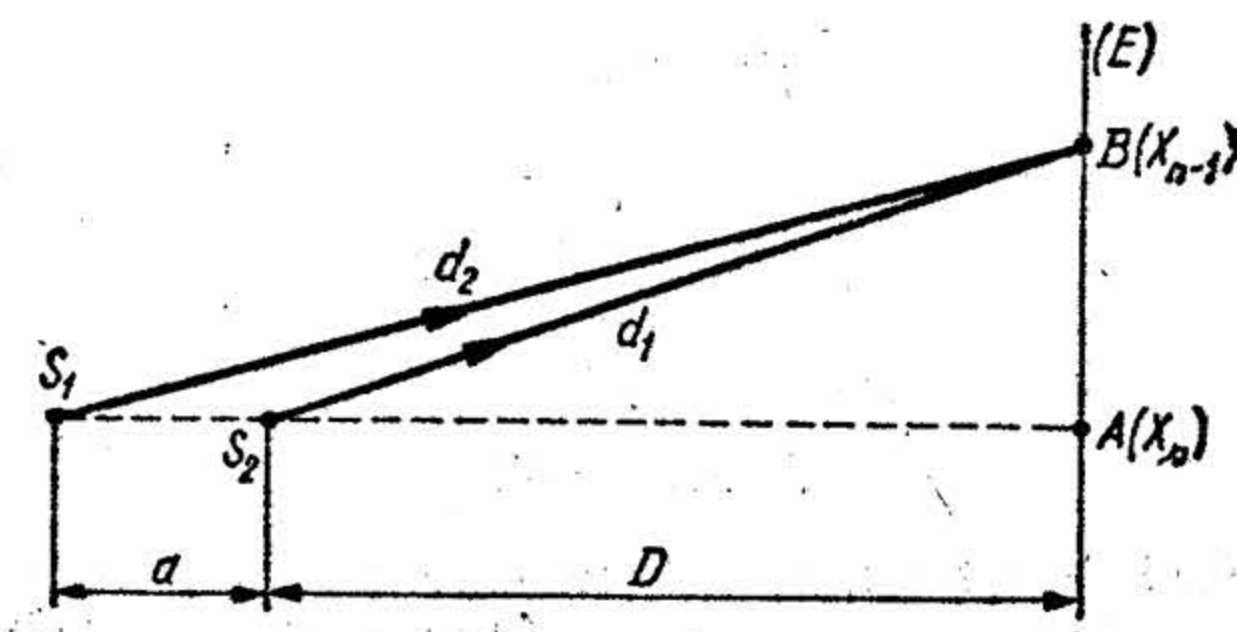


Fig. 13.16

Soluție. a) Condiția de formare a maximului de interferență este $d_2 - d_1 = n\lambda$, care pentru cazul particular $S_2A = d_2$; $S_1A = d_1$ devine $a = n\lambda$.

În punctul central A se va forma maximul de ordinul n , iar figurile de interferență vor fi coroane circulare cu centrul în A .

b) Următorul cerc luminos va începe la distanța dată de relația

$$d_2 - d_1 = (n - 1)\lambda \quad (1)$$

sau

$$\sqrt{(n\lambda + D)^2 + x_{n-1}^2} - \sqrt{D^2 + x_{n-1}^2} = (n - 1)\lambda. \quad (2)$$

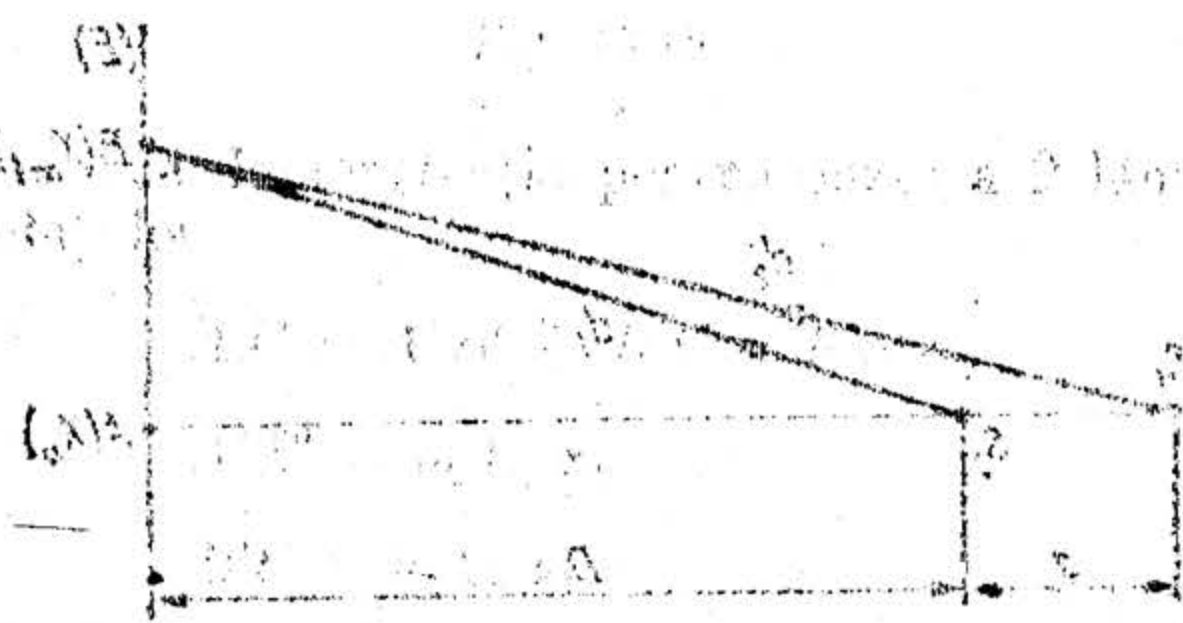
Ținând cont de condițiile impuse de problemă, se poate scrie

$$x_{n-1} \approx \sqrt{\frac{2D(D + n\lambda)}{n}} \quad (3)$$

sau

$$x_{n-1} \approx \sqrt{2D\lambda \left(\frac{D}{a} + 1 \right)}. \quad (4)$$

Relația (3) provine din (2) numai cu condițiile: $\lambda \ll a$; $\lambda \ll D$.



XIV. STRUCTURA MATERIEI. TEORIA RELATIVITĂȚII

14.1. Se știe că numărul dN de nuclee care se dezintegrează în intervalul de timp dt (de la t la $t + dt$) depinde de numărul de nuclee N existent la momentul t și de mărimea intervalului de timp, conform relației

$$dN = -\lambda N dt \quad (1)$$

unde λ este constanta radioactivă a elementului. La momentul inițial $t_0 = 0$ numărul de nuclee este N_0 . Se cere:

a) să se determine numărul N ;

b) ce relație există între λ și perioada de înjumătățire T ?

Soluție. a) Se integrează (1) și avem

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda \int dt \quad (2)$$

sau

$$\ln N = -\lambda t + C. \quad (3)$$

Notând

$$C' = \ln C \quad (4)$$

avem

$$N = Ce^{-\lambda t}; \quad (5)$$

observând că

$$C = N \Big|_{t=0} = N_0 \quad (6)$$

avem

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (7)$$

b) Conform definiției perioadei de înjumătățire, dacă $t = T$ avem $N = N_0/2$ adică din (7) rezultă

$$1 = 2e^{-\lambda T}. \quad (9)$$

Logaritmind, avem

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,693}{T}. \quad (9)$$

14.2. Un generator de radiații X produce radiații cu lungime de undă λ_1 și λ_2 ($\lambda_2 > \lambda_1$). Între ce limite este cuprinsă tensiunea U dintre electrozii tubului catodic?

Soluție. Conform conservării energiei, avem

$$h\nu = eU \quad (1)$$

sau

$$h \frac{c}{\lambda} = eU \quad (2)$$

unde ν este frecvența radiației emise, h constanta lui Planck, e sarcina electronului, iar c viteza luminii în vid.

Pentru prima radiație avem

$$U_1 = h \frac{c}{e\lambda_1} \quad (3)$$

iar pentru a doua

$$U_2 = h \frac{c}{e\lambda_2}. \quad (4)$$

Deci

$$U_2 < U < U_1$$

sau

$$\frac{hc}{e\lambda_2} < U < \frac{hc}{e\lambda_1}. \quad (5)$$

14.3. Utilizând formula de compunere a vitezelor în mecanica relativistă, să se justifice afirmația că viteza luminii în vid este viteza naturală maximă.

Soluție. Avem relația

$$u = \frac{v + v_r}{1 + \frac{vv_r}{c^2}} \quad (1)$$

unde: u — viteza unei particule față de sistemul de referință inertial fix, v_r — viteza particulei față de sistemul de referință mobil, v — viteza sistemului mobil față de cel fix, c — viteza luminii în vid.

Revine să arătăm că $u \leq c$. Există posibilitățile:

a) $v_r = c$, adică particula se mișcă în sistemul propriu cu viteza luminii în vid. Avem

$$u = \frac{v + c}{1 + \frac{vc}{c^2}} = c. \quad (2)$$

b) $v = c$, adică sistemul propriu al particulei se mișcă cu viteza luminii în vid față de sistemul fix. Avem

$$u = \frac{c + v_r}{1 + \frac{cv_r}{c^2}} = c.$$

c) $v = c$; $v_r = c$ (cazul cel mai favorabil). Avem

$$u = \frac{c + c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = c.$$

Se verifică astfel afirmația din enunțul problemei.

14.4. Într-un sistem de referință inertial fix se deplasează în același sens două corpuri cu masele m_1 și m_2 și cu vitezele v_1 și v_2 nerelativiste. Să se găsească un sistem de referință inertial mobil coliniar cu primul pentru care energia cinetică nerelativistă a sistemului format de cele două corpuri să fie minimă și să se calculeze valoarea acestei energii (fig. 14.4)*.

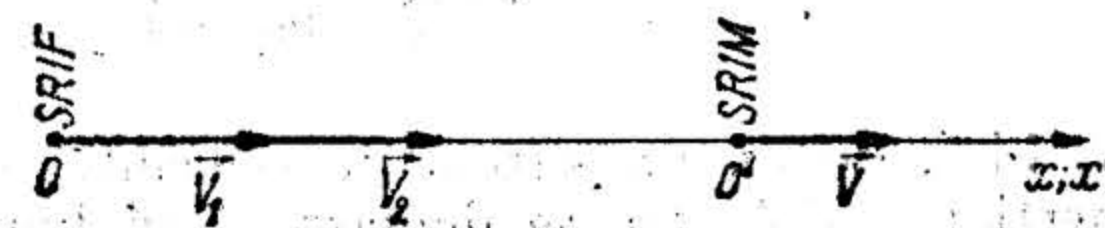


Fig. 14.4

Soluție. Fie O' originea sistemului mobil căutat, care se deplasează în același sens cu cele două corpuri cu viteza de transport v . Vitezele celor două corpuri în sistemul mobil (vitezele relative) vor fi

$$v_{r1} = v_1 - v \quad (1)$$

$$v_{r2} = v_2 - v. \quad (2)$$

* Problemele 14.4 și 14.5 pot fi incluse și în capitolele de mecanică.

Energia cinetică a sistemului fix, față de sistemul mobil, va fi

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \quad (3)$$

sau

$$E_c = \frac{1}{2} [m_1(v_1^2 - 2vv_1 + v^2) + m_2(v_2^2 - 2vv_2 + v^2)]. \quad (4)$$

Prima derivată a energiei cinetice în raport cu viteza de transport are valoarea

$$\frac{dE_c}{dv} = v(m_1 + m_2) - (m_1 v_1 + m_2 v_2) \quad (5)$$

iar a doua

$$\frac{d^2 E_c}{dv^2} = m_1 + m_2 > 0, \quad (6)$$

deci energia cinetică trece printr-un minim. Din egalarea cu zero a lui (5), rezultă

$$v \Big|_{E_c \min} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (7)$$

Înlocuind această valoare a vitezei de transport în (3), avem

$$E_{c \min} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(v_1 - v_2)^2}{2}. \quad (8)$$

14.5. Se dă un sistem de referință inerțial fix xOy și unul mobil inerțial $x'O'y'$ care se deplasează în lungul axei absciselor, cu viteza de transport v nerelativistă. La un moment dat, se aruncă în sus, în sistemul mobil, un corp care revine în punctul de aruncare după un timp t_0 . Se cere:

a) ecuația traiectoriei „absolute” a corpului;

b) raportul înălțimilor maxime atinse de mobil în cele 2 sisteme de referință inerțiale (fig. 14.5).

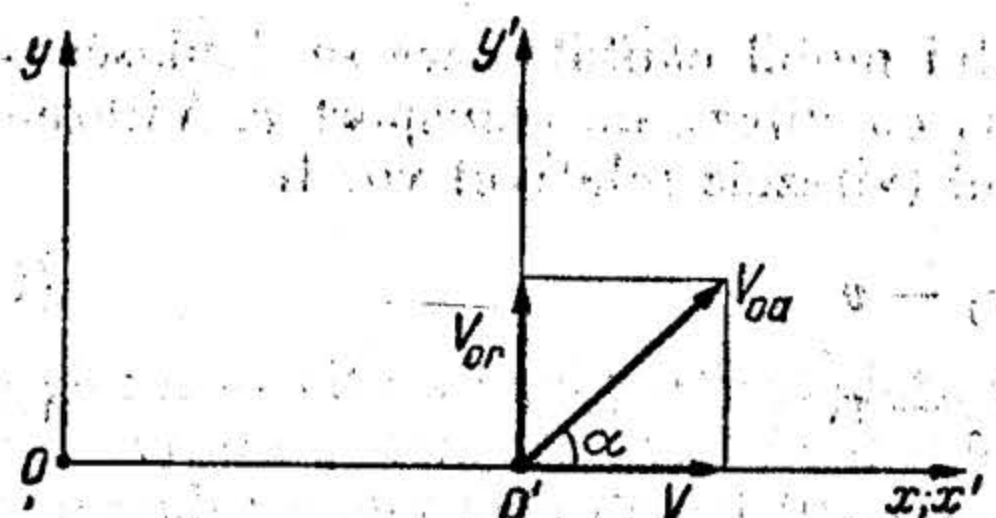


Fig. 14.5

Soluție. a) Față de sistemul fix, ecuațiile parametrice ale traiectoriei vor fi

$$\begin{aligned} x &= vt \\ y &= v_{or}t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Din datele problemei avem

$$v_{or} = \frac{gt_0}{2}. \quad (2)$$

Prin eliminarea timpului, obținem traiectoria cerută

$$y = \frac{gxt_0}{2v} - \frac{gx^2}{2v^2} = \frac{gx}{2v} \left(t_0 - \frac{x}{v} \right). \quad (3)$$

b) În sistemul mobil avem

$$(h_{max})_M = \frac{v_{or}^2}{2g} = \frac{gt_0^2}{8}. \quad (4)$$

În sistemul fix, viteza inițială de aruncare este

$$v_{0a} = \sqrt{v^2 + v_{or}^2} \quad (5)$$

și

$$\sin \alpha = \frac{v_{or}}{\sqrt{v^2 + v_{or}^2}} \quad (6)$$

deci

$$(h_{max})_F = \frac{v_{0a}^2}{2g} \sin^2 \alpha = \frac{v_{or}^2}{2g}. \quad (7)$$

Avem

$$\frac{(h_{max})_M}{(h_{max})_F} = 1. \quad (8)$$

14.6. Să se determine energia maximă pe care un ciclotron cu duanții de diametru d o poate asigura unui fascicul de protoni (de masă m și sarcină $+e$ fiecare). Tensiunea ce se aplică duanților are frecvența ν .

Soluție. Condiția de sincronism, necesară funcționării ciclotronului, cere ca frecvența tensiunii alternative aplicate duanților să fie strict egală cu frecvența mișcării cvasicirculare a protonilor, adică

$$\nu = \frac{eB}{2\pi m} \quad (1)$$

de unde

$$B = \frac{2\pi\nu m}{e} \quad (2)$$

Energia cinetică maximă se obține dacă diametrul traiectoriei protonilor coincide cu cel al duanților. Rezultă

$$E_{c\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \quad (3)$$

Știind că

$$v_{\max} = \frac{eBd}{2m} \quad (4)$$

avem

$$E_{c\max} = \frac{1}{2} \pi^2 m d^2 \nu^2 \quad (5)$$

14.7. O particulă α , cu energia inițială E_1 , se ciocnește frontal de un nucleu și este respinsă înapoi, noua energie a particulei fiind E_2 ($E_2 < E_1$). Se cere raportul maselor particulei și nucleului.

Soluție. Notăm cu v_1 și v_2 vitezele particulei înainte și după procesul nuclear și cu v viteza nucleului după ciocnire (presupus inițial în repaus). Notăm cu m_α și m_N masa particulei, respectiv a nucleului. Conform legii conservării energiei, avem

$$\frac{m_\alpha v^2}{2} = \frac{1}{2} m_\alpha (v_1^2 - v_2^2) \quad (1)$$

de unde

$$v^2 = \frac{m_\alpha}{m_N} (v_1^2 - v_2^2) \quad (2)$$

Legea conservării impulsului ne dă

$$m_N v - m_\alpha v_2 = m_\alpha v_1 \quad (3)$$

de unde

$$v = \frac{m_\alpha}{m_N} (v_1 + v_2) \quad (4)$$

Din relațiile precedente rezultă

$$\frac{m_\alpha}{m_N} = \frac{1 - \frac{v_2}{v_1}}{1 + \frac{v_2}{v_1}} \quad (5)$$

Deoarece

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \quad (6)$$

avem

$$\frac{m_\alpha}{m_N} = \frac{1 - \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}}{1 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}} \quad (7)$$

14.8. Să se determine lungimea de undă limită a radiațiilor cuprinse în seria Balmer.

Soluție. Formula Balmer-Ritz, adaptată pentru seria Balmer, se scrie

$$\nu = R c \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (1)$$

unde R este constanta lui Rydberg. Ultima radiație din serie se obține pentru $n \rightarrow \infty$. Deci

$$\nu_{\lim} = \frac{Rc}{4} \quad (2)$$

Știind că

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (3)$$

avem

$$\lambda_{\lim} = \frac{4}{R} \quad (4)$$

14.9. Într-o cameră Wilson, o particulă α este deviată în urma unei ciocniri elastice cu un nucleu, sub un unghi φ . Nucleul este deviat sub un unghi egal cu $-\varphi$. Cu ce nucleu s-a ciocnit particula (fig. 14.9)?

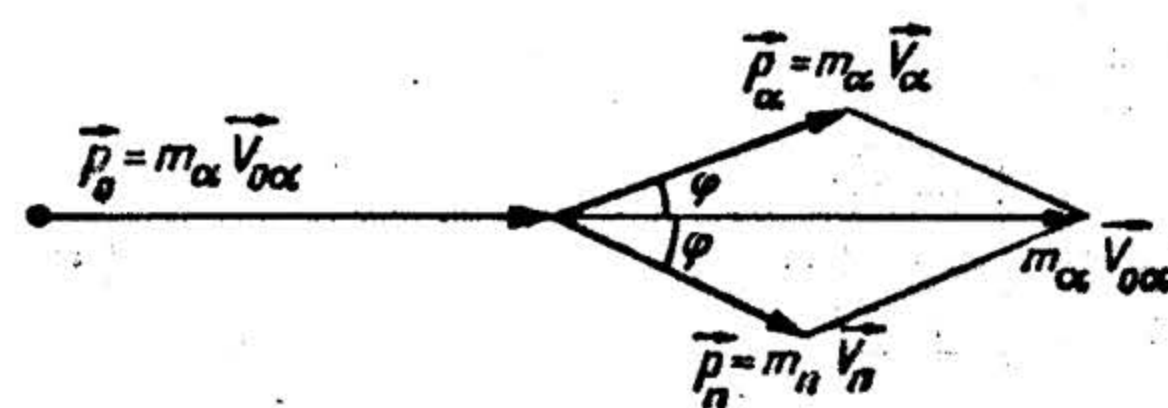


Fig. 14.9

Soluție. Impulsul inițial al particulei α este

$$p_{0x} = m_{\alpha} v_{0x} \quad (1)$$

Conform legii conservării impulsului, avem

$$p_{0x} = p_{\alpha} + p_N \quad (2)$$

sau

$$m_{\alpha} v_{0x} = m_{\alpha} v_{\alpha} \cos \varphi + m_N v_N \cos \varphi = 2 m_{\alpha} v_{\alpha} \cos \varphi \quad (3)$$

unde v_{0x} și v_{α} sînt vitezele particulei înainte și după ciocnire, iar v_N viteza nucleului după ciocnire.

Conservarea energiei cinetice ne dă relația

$$m_{\alpha} v_{0x}^2 = m_{\alpha} v_{\alpha}^2 + m_N v_N^2 \quad (4)$$

sau

$$m_N v_N^2 = m_{\alpha} v_{0x}^2 \left[1 - \frac{1}{(2 \cos \varphi)^2} \right] \quad (5)$$

Rezultă

$$m_N = \frac{m_{\alpha} \sec^2 \varphi}{4 - \sec^2 \varphi} \quad (6)$$

de unde se poate deduce natura nucleului ciocnit*).

14.10. Să se arate că relația de nedeterminare $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi}$ este valabilă și pentru nedeterminarea $\Delta t \Delta E_c$.

Soluție. Știm că

$$E_c = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{p_x^2}{2m} \quad (1)$$

* Pentru deducerea relației (6), se afiliază la (3) și ecuația proiecției relației (2) pe axa Oy (v. fig. 14.9).

de unde

$$\Delta E_c = \frac{2p_x \cdot \Delta p_x}{2m} \quad (2)$$

sau

$$\Delta E_c = \frac{mv_x \Delta p_x}{m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta p_x \quad (3)$$

Rezultă

$$\Delta E_c \Delta t = \Delta x \Delta p_x \quad (4)$$

sau

$$\Delta E_c \Delta t \geq \frac{h}{2\pi} \quad (5)$$

Calculul mai riguros arată că numitorul din (5) este 4π .

CUPRINS

Cuvînt introductiv	3
I. Mişcarea rectilinie uniformă	5
II. Mişcarea rectilinie variată şi în câmpul gravitaţional	22
III. Mişcarea circulară uniformă	51
IV. Mişcarea oscilatorie	65
V. Principiile dinamicii. Energia mecanică	80
VI. Compunerea forţelor. Echilibrul corpurilor	98
VII. Mecanica fluidelor	111
VIII. Rezistenţa materialelor	126
IX. Fizică moleculară. Termodinamică	133
X. Electrostatică	147
XI. Curentul staţionar	163
XII. Electromagnetism	181
XIII. Optică	192
XIV. Structura materiei. Teoria relativităţii	213